Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente

Desarrollo de habilidades. Matemáticas

Segunda parte

Primaria. Fase 5

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Martha Velda Hernández Moreno
Subsecretaria de Educación Básica

Xóchitl Leticia Moreno Fernández
Directora General de Desarrollo Curricular

Material elaborado por la Dirección de Desarrollo Curricular para la Educación Primaria

Agosto de 2024

Índice

Presentación *1*

Capítulo 2. Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas *3*

Cuerpos y figuras geométricas 3

Ubicación espacial 14

Medición 24

Organización e interpretación de datos 40

Nociones de probabilidad 48

Fuentes de consulta *59*

Presentación

Estimada maestra, estimado maestro

Para dar continuidad al segundo capítulo, **Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas**, en este cuaderno de trabajo se abordan cinco de los contenidos considerados en el Programa Sintético de la Fase 5:

1. Cuerpos y figuras geométricas
2. Ubicación espacial
3. Medición
4. Organización e interpretación de datos
5. Nociones de Probabilidad

De la misma forma que en los contenidos anteriores, en cada uno se destaca la importancia del estudio del contenido y se incluyen conceptos, algunas ideas que prevalecen entre las y los docentes sobre su enseñanza, recomendaciones y orientaciones sobre cómo abordarlo.

En “Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades” se enlistan algunas ideas que tienen niñas y niños sobre el tema, así como sugerencias didácticas.

La sección “Actividades para el aprendizaje” integra algunas actividades factibles de ponerse en práctica para favorecer el desarrollo de habilidades, a partir del trabajo con los contenidos de matemáticas del Campo formativo. En ese sentido, la intención no es agotar lo que podría realizarse fuera y dentro del aula para lograr ese cometido, sino proponer ejemplos que estimulen la creatividad y construcción de otras situaciones que generen aprendizajes significativos.

A lo largo del cuaderno se distinguen tres iconos:


Se propone lecturas de textos.


Se proponen ideas que motivan cuestionar la práctica docente.


Se propone la construcción de actividades didácticas que integren algunos elementos de las diferentes secciones del apartado.

Finalmente se incluyen las **Fuentes de consulta** que además de dar sustento a esta propuesta, se presume serán de utilidad para fortalecer los saberes docentes.

Le sugerimos disponer de un cuaderno para hacer anotaciones, resolver las actividades y registrar sus conclusiones. De ser posible, comparta sus experiencias e inquietudes con sus colegas para que se retroalimenten.

Capítulo 2. Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas

Cuerpos y figuras geométricas

Las acciones y vivencias que enfrentan las y los estudiantes en el ámbito geométrico van más allá de reconocer figuras y cuerpos geométricos y repetir algunas de sus propiedades. El interés del estudio de la geometría en la Educación Primaria es incentivar la práctica del razonamiento deductivo, así como seguir desarrollando la percepción del espacio físico y la imaginación espacial.

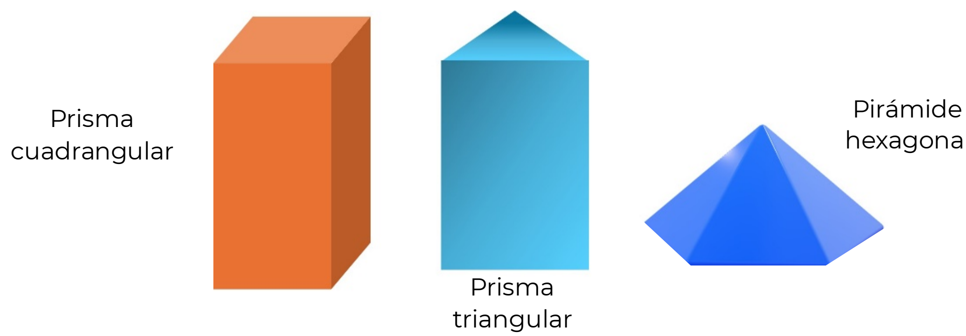
En la Fase 4 el trabajo respecto a figuras planas se orientó principalmente a conocer y clasificar triángulos y cuadriláteros a partir de las características de sus lados (número, longitud, paralelismo y perpendicularidad) o sus ángulos (mayores, menores o iguales a 90°); y, respecto a los cuerpos geométricos, se inició el conocimiento de prismas rectos y se analizaron desarrollos planos con los cuales se pueden construir.

En esta Fase se amplía el conocimiento de las figuras planas ya que se continúa explorando las características de los **polígonos** y se espera que las y los estudiantes comprendan las particularidades y relaciones geométricas que existen entre **círculo, circunferencia, diámetro y radio**.

Circunferencia y círculo son conceptos estrechamente vinculados. En estricto sentido, una circunferencia está conformada por todos los puntos que tienen la misma distancia a otro punto, al cual se le llama centro del círculo, en tanto que un círculo es toda la superficie delimitada por la circunferencia. El radio se identifica como la distancia que hay del centro del círculo a cualquier punto de la circunferencia y, el diámetro, es la línea que pasa por el centro del círculo y lo divide en dos partes iguales, tiene el doble de magnitud que el radio.

Las y los estudiantes continúan desarrollando habilidades para trazar figuras geométricas con el apoyo de instrumentos de trazo y medición.

Con relación al trabajo con cuerpos geométricos, se busca que las y los estudiantes generalicen las características de cualquier **prisma** y **pirámide**. Los prismas tienen caras rectangulares, dos bases opuestas iguales y el polígono de las bases determina su nombre. Las pirámides tienen caras en forma de triángulos isósceles que comparten un vértice llamado cúspide y una base cuya forma define su nombre.



También en esta Fase se inicia el estudio del **cilindro** y **cono**, cuerpos que se estudiarán con más profundidad en la Fase 6. El cilindro es un cuerpo geométrico que tiene dos bases circulares iguales y una cara lateral curva y el cono es un cuerpo geométrico que cuenta con una base circular y una cara curva.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la geometría

- Actividades como construir y reproducir figuras y cuerpos con instrumentos de trazo y medición (regla, escuadra, transportador, compás), anticipar si un desarrollo plano corresponde o no a un cuerpo geométrico, favorecen el desarrollo de la percepción geométrica e imaginación espacial.

- Niñas, niños y adolescentes suelen pensar que la medida de un ángulo cambia si la longitud de sus lados aumenta o disminuye.

- Es conveniente que niñas, niños y adolescentes tracen polígonos regulares (figura plana delimitada con lados y ángulos iguales) como: triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octágonos.

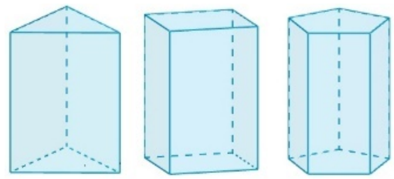
- Propiciar la exploración de varios métodos para obtener la medida de la circunferencia, antes de apoyarse en las medidas del radio o diámetro.

- Proponer situaciones que requieran el trazo de circunferencias con el apoyo de instrumentos geométricos como el compás y la regla graduada a partir de diferentes datos. Es importante que las y los estudiantes distingan la circunferencia (línea que limita al círculo) del círculo (toda la superficie delimitada por la circunferencia).

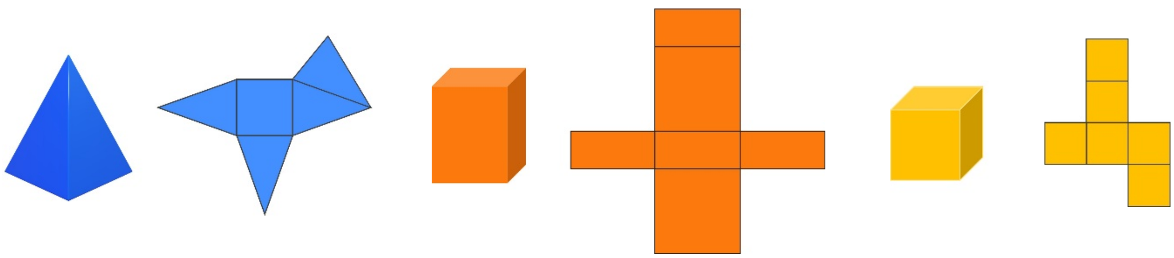
- Trazar una circunferencia y comprobar que cualquiera de sus puntos tiene la misma distancia al centro, ayuda a las y los estudiantes a comprender y justificar la relación entre circunferencia, círculo, radio y diámetro. Motivar la reflexión a partir de preguntas como: ¿qué relación hay entre la abertura del compás y la medida del radio?, ¿cuánto debe medir la abertura del compás para generar un círculo cuyo diámetro mida 10 cm?

- La relación que existe entre la circunferencia y el diámetro es $\boldsymbol{\pi}$, y se establece con el valor numérico 3.1416, esto se interpreta como: “la medida de la circunferencia de un círculo es aproximadamente 3.1416 veces la longitud de su diámetro”. Para fines de cálculos solo se toma el valor 3.14. Conviene plantear diversas actividades en las que las y los estudiantes comprueben que el diámetro cabe 3 veces y una fracción en la circunferencia.

- La interpretación y representación de cuerpos geométricos en un plano no es tarea fácil para niñas, niños y adolescentes, requiere de un trabajo previo de manipulación para identificar sus caras, aristas y vértices. Una estrategia para representar las aristas y caras que no son visibles desde cierta perspectiva (vista lateral, frontal o superior), es usar líneas punteadas:



- Una vez que niñas, niños y adolescentes identifican las figuras que conforman las caras de prismas, pirámides, cilindros y conos, conviene que establezcan relaciones entre los cuerpos geométricos (tres dimensiones) y los dibujos que los representan en el plano (dos dimensiones). Para ello, proponer actividades como: Representar el cuerpo geométrico en el plano, a partir de dibujar sus tres dimensiones. Por ejemplo:



O anticipar a qué cuerpo geométrico corresponde uno o varios desarrollos planos, y después, verificar si con el modelo seleccionado es posible construir dicho cuerpo.

- Un error común es considerar que la altura de una pirámide es la altura de cualquiera de los triángulos de sus caras, por lo que es importante propiciar que se identifique como altura de una pirámide a la línea perpendicular a la base que va de esta a la cúspide y, aplicar este concepto al cono.

- Propiciar que las y los estudiantes distingan semejanzas y diferencias entre las características de prismas, pirámides, cilindros y conos.

- Los prismas tienen caras rectangulares, dos bases opuestas iguales y el polígono de las bases determina su nombre. Las pirámides tienen caras en forma de triángulos isósceles que comparten un vértice llamado cúspide, una base cuya forma define su nombre. Es conveniente cuestionarles acerca de la posibilidad de construir una pirámide con otro tipo de triángulos y motivar a que lo comprueben.

- El cilindro tiene dos bases circulares iguales y una cara lateral curva. El cono está formado por un círculo que funge como única base plana y solamente tiene una cara curva.

Actividades para el aprendizaje

¿Cómo es?[1]

El grupo se organiza en equipos de cuatro elementos. Con anticipación se preparan tantas tarjetas como equipos se integren, además de materiales como: plastilina, barra de jabón, popotes, palitos de madera, palillos, hojas de fomi, cartulina gruesa, etcétera. Cada equipo se encarga de la construcción del cuerpo geométrico que se describe en la tarjeta que seleccionó, con los materiales que consideren más adecuados. Las tarjetas son:

Todas las caras son planas, algunas son siempre rectangulares. Tiene dos caras iguales entre sí, que pueden ser diferentes a un rectángulo. Todas las aristas son rectas.	Todas las caras son planas, algunas son siempre triangulares. Puede tener una cara diferente a un triángulo. Todas las aristas son rectas.
Tiene dos caras planas circulares y una cara curva. Todas las aristas son curvas.	Las seis caras son planas, cuadradas y del mismo tamaño. Todas las aristas son rectas.
Tiene una cara plana circular y una cara curva. La única arista es curva. Tiene un vértice.	

Es importante motivar a que los equipos se animen a construir diferentes prismas y pirámides para reconocer semejanzas y diferencias entre unas y otras. Una vez que la mayoría de los equipos haya terminado, se eligen algunos para leer la descripción de la tarjeta ante el grupo y presentar su modelo. Grupalmente se revisa que haya correspondencia entre el modelo y la descripción de la tarjeta. Considerar que en el caso del prisma y la pirámide, los equipos pueden decidir cuál realizan.

¿Todos o algunos?[2]

Se trata de que las y los estudiantes identifiquen el número de caras, aristas y vértices de cuerpos geométricos y los clasifiquen de acuerdo con algunas de sus propiedades. El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes y cada uno tiene una tabla como la siguiente y que mostrará en el pizarrón:

[1] Adaptado de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 138-141). México.
[2] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 142-144). México.

Nombre del cuerpo	Número total de caras	Número total de aristas	Número de caras planas	Número de caras curvas	Número de vértices
Cilindro					
Cono					
Cubo					
Pirámide ____________					
Prisma ____________					

Los equipos completan la tabla, si es necesario con apoyo de modelos construidos anteriormente; las y los estudiantes deciden cuál pirámide y prisma van a considerar. Una vez que terminen de completar la tabla, se revisa grupalmente.

Después, se pide a los equipos que respondan las siguientes preguntas:

– ¿Qué cuerpos tienen todas las caras planas?

– ¿Qué cuerpos tienen algunas caras planas?

– ¿Qué cuerpos no tienen caras planas?

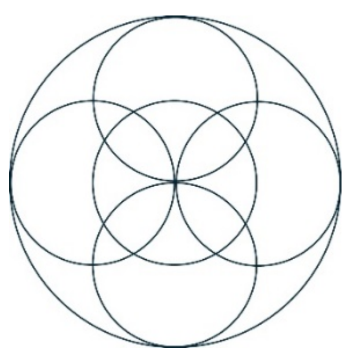
– ¿Qué cuerpos tienen al menos una cara curva?

Conviene que antes de responder la siguiente pregunta, las respuestas se comenten.

Grecas

El grupo se organiza en parejas; cada estudiante necesita una hoja blanca, compás, regla y lápices de colores para resolver el problema:

Utilicen su compás para reproducir esta greca; comenten qué hacer para que el diámetro del círculo mayor mida 12 cm.



Trazo de polígonos[3]

Es conveniente desarrollar la actividad en varias sesiones. En cada sesión, el grupo se organiza en parejas. Cada estudiante necesita una hoja blanca, compás, regla, lápices de colores.

- Cuadrado y octágono

A cada pareja se entrega una impresión del siguiente problema:

1. Tracen un círculo que tenga de diámetro 8 cm.
2. Tracen en ese círculo dos diámetros perpendiculares.
3. Con su regla, unan con líneas de un color los puntos donde los diámetros cortan a la circunferencia. ¿Cómo se llama el polígono que trazaron?
4. Tracen los ejes de simetría del cuadrado y con su regla, unan con líneas de un color diferente los puntos donde los ejes de simetría cortan a la circunferencia. ¿Qué polígono resultó?

Las construcciones de los equipos se comparan y se invita a algunos a comentar cómo resolvieron cada etapa del problema. Grupalmente describen los dos polígonos que resultaron mencionando: características de sus lados, vértices, diagonales, ejes de simetría, ángulos.

- Triángulo equilátero y hexágono

A cada pareja se entrega una impresión del siguiente problema:

1. Tracen un círculo que tenga 5 cm de radio.
2. Sin cambiar la abertura del compás, apóyenlo en cualquiera punto de la circunferencia y marquen los dos puntos donde el compás la corta.
3. Con su regla unan los dos puntos con una línea de color. Esta línea es el lado de un triángulo equilátero que se puede dibujar dentro de un círculo.
4. Con su compás localicen el vértice que falta para que puedas trazar con su regla el triángulo equilátero.
5. ¿Qué podrían hacer para trazar un hexágono a partir del triángulo equilátero que acabas de trazar? ¡Inténtenlo!

Se espera que las y los estudiantes tomen en cuenta la experiencia de construir un octágono a partir de un cuadrado inscrito en el círculo: trazar los ejes de simetría del triángulo y unir con la regla los puntos donde los ejes cortan a la circunferencia. Las construcciones de los equipos se comparan y se invita a algunos a comentar cómo resolvieron cada etapa del problema. Grupalmente describen los dos polígonos que

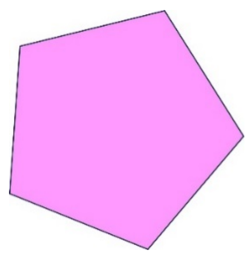
[3] Adaptada de *"Los polígonos regulares"* en Secretaría de Educación Pública. (2007). Matemáticas. Quinto grado. (pp. 98-99). México

resultaron mencionando: características de sus lados, vértices, diagonales, ejes de simetría, ángulos.

- Pentágono y decágono

A cada pareja se entrega una impresión del siguiente problema:

1. Encuentren el punto dónde debe apoyarse el compás para trazar la circunferencia que pasa por todos los vértices del pentágono regular; ahora trácenla.
2. ¿Qué pueden hacer para trazar sobre el pentágono un polígono regular de 10 lados? ¡Inténtenlo!

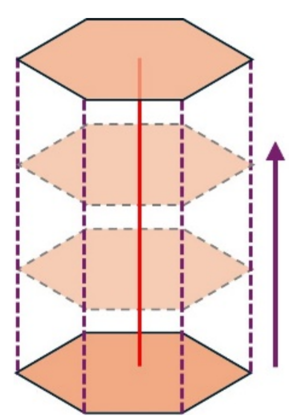


Las construcciones de los equipos se comparan y se invita a algunos a comentar cómo resolvieron el problema.

Desplazamientos[4]

La idea es que las y los estudiantes definan lo que es un prisma, una pirámide, así como sus respectivas alturas. El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes para resolver los siguientes problemas:

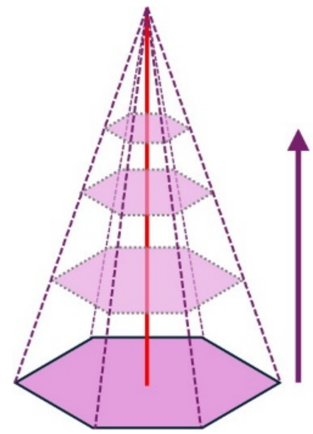
1. Al desplazar un hexágono sobre un eje vertical que pasa por su centro y unir los vértices correspondientes, se forma este cuerpo geométrico.
   - ¿Cuántas caras laterales tiene?
   - ¿Qué forma tienen y cómo son entre sí?
   - ¿Cuántas bases tiene el cuerpo?
   - ¿Qué forma tienen y cómo son entre sí?
   - ¿Qué nombre recibe el cuerpo geométrico formado?
   - ¿Qué representa la longitud del desplazamiento del hexágono?



[4] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado. (pp. 86-90). México.

2. Este cuerpo geométrico se forma al desplazar sobre un eje vertical un hexágono que se va reduciendo proporcionalmente en tamaño hasta convertirse en un punto.

   – ¿Cuántas caras laterales tiene?
   – ¿Qué forma tienen las caras y cómo son entre sí?
   – ¿Cuántas bases tiene?
   – ¿Qué nombre recibe el cuerpo geométrico formado?
   – ¿Qué representa la longitud del eje de desplazamiento del hexágono?



3. Con base en sus respuestas, escriban las características que diferencian a los prismas de las pirámides.

¿Conoces a π ?[5]

Se trata de que las y los estudiantes identifiquen a Pi (**π**) como el valor constante que resulta de dividir la medida de la circunferencia entre el diámetro del círculo. El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes. Cada equipo necesita 4 objetos circulares que tengan entre 6 y 10 cm de diámetro (tapas de frascos o envases, rollos de cinta adhesiva, etcétera), regla o cinta métrica, cordón, cuerda, agujetas o lazo delgado suficiente para rodear los objetos. Se pide al grupo que realicen lo siguiente:

Utilicen el hilo o la cuerda y la regla para medir la circunferencia de los objetos y su diámetro; registren sus resultados en la tabla. Después, utilicen la calculadora para dividir las dos medidas y completen la tabla; escriban solo dos cifras decimales para expresar el cociente.

Círculo	Medida de la circunferencia	Medida del diámetro	Cociente de la circunferencia entre el diámetro

Algunos resultados se registran en el pizarrón para analizarse grupalmente. Posteriormente, se motiva que las y los estudiantes reflexionen a partir de las preguntas:

[5] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado. (pp. 204-205). México.

– ¿Cómo son los resultados de los cocientes?, ¿en qué se parecen?

– ¿A qué crees que se deba?

Se espera que el grupo observe que hay una relación estrecha entre las medidas del diámetro y de la circunferencia; esto es, que la circunferencia mide un poco más de tres veces el diámetro. Se explica que hace muchos años esa relación se definió con un número llamado Pi (π), y su valor es 3.14159… pero para realizan cálculos de forma práctica solo se considera 3.14. Finalmente se plantea la siguiente pregunta al grupo:

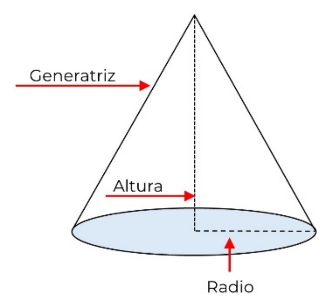
– ¿Cómo calcularían la medida de la circunferencia de un círculo si conocen la medida del diámetro?

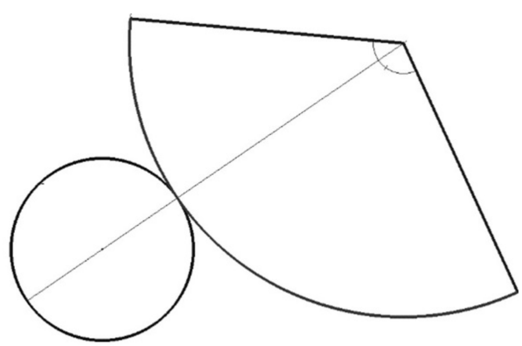
A partir de las respuestas se puede establecer una fórmula para calcular la medida de una circunferencia.

Cono para tomar agua

La idea es que las y los estudiantes reconozcan las características de un cono, así como su desarrollo plano. Se espera que reconozcan que la altura del cono es la línea que va del vértice al centro del círculo de su base. El grupo se organiza en equipos de tres integrantes; cada equipo necesita: un cono de papel (para agua), cartoncillo o cartulina, tijeras, compás, regla, pegamento. Se pide a los equipos que realicen lo siguiente:

1. Tracen y recorten el círculo que sería la base del cono.
2. Identifiquen la altura del cono; asimismo, determinen el diámetro de la base.
3. Corten longitudinalmente el cono, desde la base hasta el vértice y extiéndanlo.
4. Peguen el cono extendido sobre el cartoncillo, junto al círculo que recortaron para construir el desarrollo plano del cono.





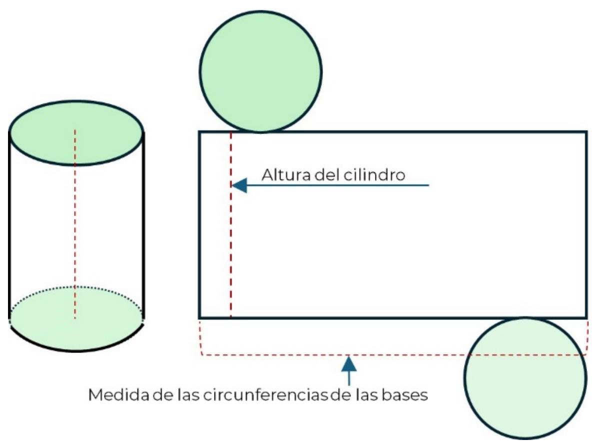
Grupalmente se comentan las construcciones y las dificultades que tuvieron para realizarlas.

Las figuras del cilindro

Organizados en equipos de tres integrantes, las y los estudiantes reconocen las características del cilindro y construyen su desarrollo plano. Cada equipo necesita: un tubo de cartón (como el de papel sanitario), cartoncillo o cartulina, tijeras, compás, regla, pegamento. Se pide a los equipos que realicen lo siguiente:

1. Tracen y recorten los círculos que serían las bases del tubo de cartón.
2. Corten longitudinalmente el tubo y, péguenlo completamente en el cartoncillo, junto a los círculos que recortaron para construir su desarrollo plano.
3. Registren en el desarrollo plano estas medidas: altura del cilindro, diámetro de las bases, perímetro de las bases (medida de la circunferencia).

Grupalmente se comentan las construcciones; conviene motivar la reflexión de las y los estudiantes acerca de que la cara curva del cilindro es un rectángulo y que uno de sus lados coincide con la altura del cilindro y el otro lado coincide con el perímetro de la base.



Realice las tres actividades relacionadas con el trazo de polígonos. Después, elabore una lista de los conocimientos y otra de las habilidades involucradas en esa tarea.

Ubicación espacial

Visualizar y orientar un objeto, un sujeto o un espacio, no incluye únicamente la habilidad de "ver" los objetos y los espacios, sino también la habilidad de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones (rotación, sección, desarrollos, ...)

Margherita Gonzato
Teresa Fernández
Juan D. Godino

En su vida cotidiana las y los estudiantes están en constante interacción con el espacio en el que se desenvuelven. Si bien han tenido experiencias para desplazarse y orientarse en su entorno inmediato a partir del trabajo de otros Campos formativos, el interés de este Campo es propiciar experiencias que les ayuden a comprender, describir y representar el entorno y el mundo donde viven; enfrentar problemas que impliquen el diseño e interpretación de representaciones del espacio, para comunicar tanto desplazamientos como la posición de personas, animales u objetos.

En particular, con el estudio de las matemáticas, se pretende desarrollar nociones y habilidades relacionadas con la representación del espacio (croquis, planos, mapas, cálculo de distancias, escalas) y su interpretación, así como la descripción verbal (oral o escrita), la construcción de sistemas de referencia para ubicar personas, plantas, animales u objetos y describir trayectos.

En la primera parte de la Fase, el trabajo se orienta a la representación del espacio en descripciones orales o escritas de desplazamientos y ubicación de personas, animales, plantas u objetos y en la realización de croquis.

Un **croquis** es un diseño informal, sin mucha precisión ni detalles de un espacio, por ejemplo, una habitación, el piso de un edificio, una calle, y por lo general se hace sin usar instrumentos geométricos o escalas. Sin embargo, elaborar un croquis requiere de la memoria visual y la imaginación espacial, ya que el espacio que se representa se dibuja como si se viera desde arriba, las relaciones de tamaño de los elementos que lo componen se deben mantener, además de incluir puntos de referencia.

Un **plano** es otro tipo de representación del espacio que se estudia en la segunda parte de la Fase; a diferencia del croquis implica más precisión en la proporción del dibujo respecto a la realidad, lo que requiere hacer uso de una escala, de instrumentos geométricos y de los puntos cardinales.

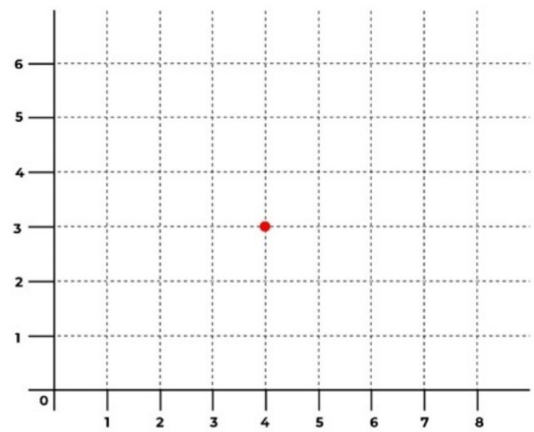
La **escala** se define como la relación que existe entre una distancia medida sobre un plano o un mapa y la distancia real que le corresponde sobre la superficie terrestre. Las escalas se representan numéricamente (1:200, significa que 1 cm del plano representa 2 m de terreno) o gráficamente (

).

Tanto el croquis como el plano son útiles para representar la ubicación de objetos, lugares, personas y animales, todo depende de la precisión que se requiere.

En esta Fase las y los estudiantes inician el estudio del **plano cartesiano** y las convenciones para ubicar puntos en su primer cuadrante, en el que las coordenadas se determinan con números naturales.

El plano cartesiano está conformado por dos ejes perpendiculares, el eje horizontal de las **abscisas** o *eje x*, y el eje vertical de las **ordenadas** o *eje y*. El punto en que se cruzan ambos ejes se denomina **origen**. Para ubicar un punto en el plano cartesiano, se determinan pares ordenados o coordenadas: primero se menciona la ubicación del punto respecto al eje de las abscisas y después, su ubicación respecto al eje de las ordenadas. En el ejemplo, el par ordenado que indica la ubicación del punto rojo es (4, 3), que significa cuatro unidades respecto al eje de las abscisas y tres unidades respecto al eje de las ordenadas.



Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la ubicación espacial

- Niñas, niños y adolescentes han tenido experiencias relacionadas con la elaboración e interpretación de croquis para comunicar la ubicación de personas, plantas. animales, objetos, lugares, así como trayectos. En esta Fase se parte de esas experiencias y se avanza hacia la construcción de un sistema de referencia para ubicar lugares o describir trayectos en croquis o planos locales en los que se distingan calles o avenidas.

- Las habilidades que niñas, niños y adolescentes desarrollan al usar diversos recursos gráficos (planos, mapas de redes de transporte público, croquis de un espacio público, entre otros) para expresar la ubicación de una persona, animal, planta, objeto o sitio o indicar cómo desplazarse hacia un lugar específico, favorecen la comprensión del plano cartesiano.

- Orientar a niñas, niños y adolescentes sobre el uso de diversos recursos gráficos al expresar la ubicación de una persona, animal, planta u objeto o redactar indicaciones para desplazarse hacia un lugar específico.

- Realizar descripciones orales o escritas de rutas para ir de un lugar a otro, cuidar que no se limite a un ejercicio de oralidad o expresión escrita, sino que apunte a la reflexión sobre aspectos matemáticos implicados en la ubicación espacial, por ejemplo, el cálculo y comparación de distancias, el uso de sistemas de referencia y de la escala. Algunos ejemplos sobre el tipo de problemas que se pueden plantear son: seguir o trazar caminos alternativos para desplazarse de un lugar a otro cuando hay diagonales, calles que no son rectas, etcétera, y plantear preguntas como: ¿Cuál es el camino más corto?

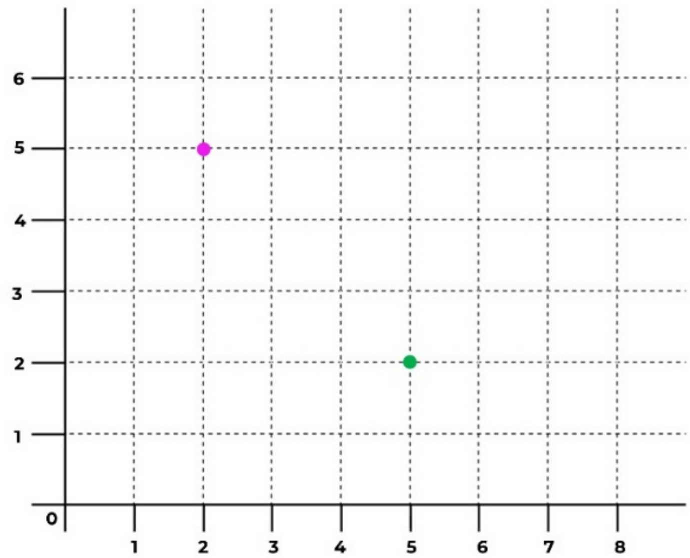
- Interpretar planos sencillos ya elaborados, que sean de un piso de la escuela o de otra construcción o planos de su colonia (obtenidos de alguna guía o página de internet) o del centro de su ciudad, en los que, por ejemplo, se les indique la escala (1 cm representa 5 m, 10 m, 100 m) y se pregunte sobre medidas reales a partir de las medidas del plano.

- En vinculación con actividades deportivas, describir recorridos que se realicen corriendo o caminando. Proponer juegos donde sea necesario tomar acuerdos sobre cómo representarlos gráficamente y después realizarlos para comprobar si fueron claras las trayectorias indicadas.

- Proponer juegos de comunicación para determinar la posición de algo o alguien, sin haber fijado previamente el sistema, por ejemplo, en un patio embaldosado, en el aula, sobre una cuadrícula o un tablero de ajedrez. Esta condición favorece la reflexión acerca de que es necesario tener un punto de referencia para iniciar la descripción de la ubicación.

- Ubicar puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano implica utilizar los ejes de coordenadas cartesianas como sistema de referencia. Es conveniente proponer situaciones en las que niñas, niños y adolescentes usen *pares ordenados* o *coordenadas* (el primer número representa el número de unidades que se avanza de manera horizontal a partir del origen, y el segundo, el número de unidades que se avanzan de manera vertical a partir del origen).

- Es importante consolidar la idea de par ordenado para que niñas, niños y adolescentes identifiquen, por ejemplo, que los puntos (5, 2) y (2, 5) son diferentes:



- En vinculación con el contenido de Figuras y cuerpos geométricos, se pueden plantear juegos de comunicación, donde un equipo da las coordenadas que corresponden a los vértices de una figura geométrica y otro equipo la dibuja.

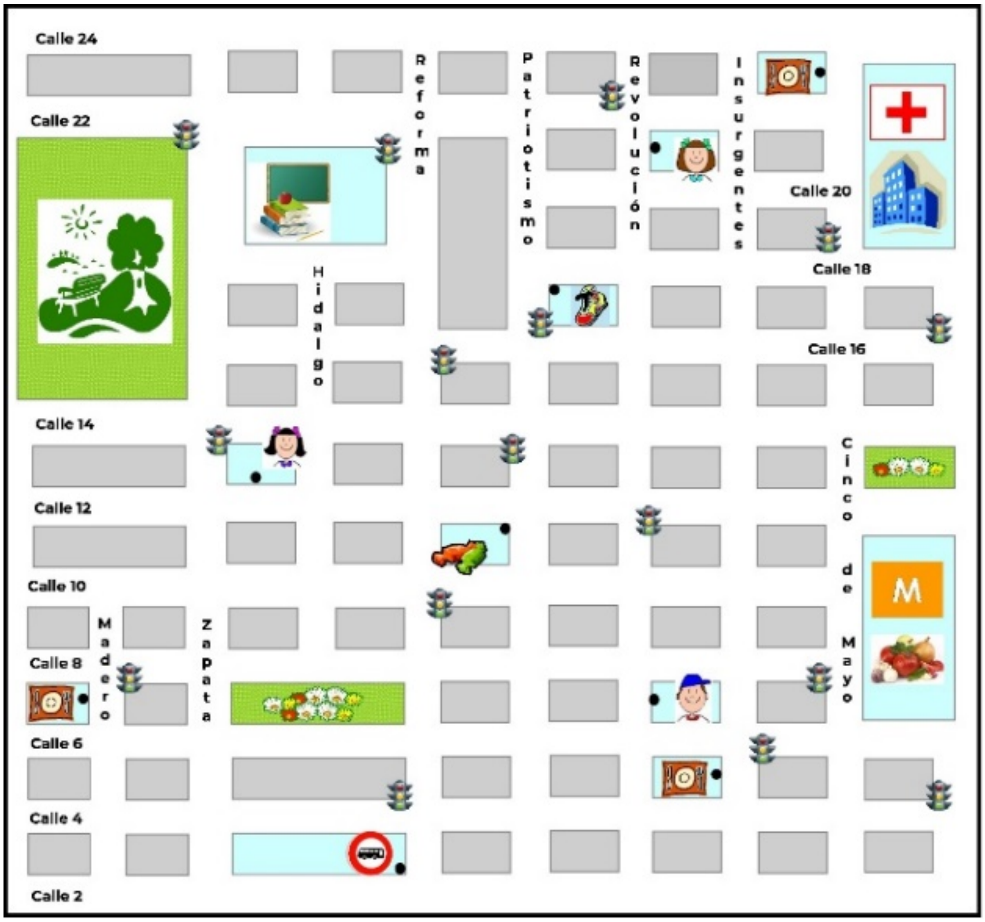
Actividades para el aprendizaje

Cerca de la casa de Pedro[6]

Esta actividad implica que las y los estudiantes, organizados en parejas o equipos de tres integrantes, interpreten un plano para identificar y describir la ubicación de algunos lugares de interés.

Con base en la información que hay en el mapa de la colonia donde Pedro vive, respondan las siguientes preguntas:

[6] Adaptado de *"La colonia de Isabel"* en Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 33-36). México.

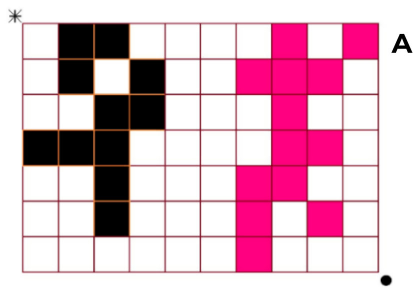


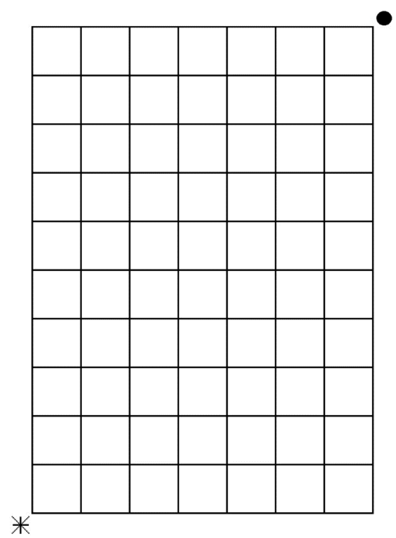
1. La casa de Pedro se ubica al sur de la colonia. ¿Entre qué calles se encuentra?
2. Sara, una de las amigas de Pedro vive sobre la Calle 12. ¿Qué indicaciones le darían a Pedro para ir de su casa a la de Sara?
3. Otra de las amigas de Pedro es Tania, ¿dónde se ubica su casa?
4. ¿Qué lugar está más cerca de la casa de Pedro, la escuela o el hospital? ¿Por qué?
5. De los tres restaurantes ¿cuál queda más cerca de la casa de Sara?

Y en esta posición, ¿cómo queda?[7]

La idea de esta actividad es que las y los estudiantes, organizados en equipos de tres integrantes, diseñen un sistema de referencia para reproducir las figuras de una retícula en otra que tiene una orientación diferente.

Individualmente reproduzcan en la retícula las figuras de la retícula “A”.





– ¿Cuántos grados giró la retícula A para llegar a esta posición?

Ahora comenten brevemente con su equipo qué hicieron para reproducir las figuras.

Se espera que las y los estudiantes recurran a contar las casillas, o buscar un código para identificar columnas y filas. Grupalmente se analizan las diferentes estrategias y acuerdan cuál es la más sencilla.

Una variante de la actividad es organizar al grupo en equipos de cuatro integrantes y a su vez, dividirlos en parejas. A una pareja se le proporciona una retícula de puntos y a otra pareja, una figura como esta:

Y se pide que la pareja que tiene la figura dé instrucciones a la otra para que, sin verla la reproduzca en la retícula.

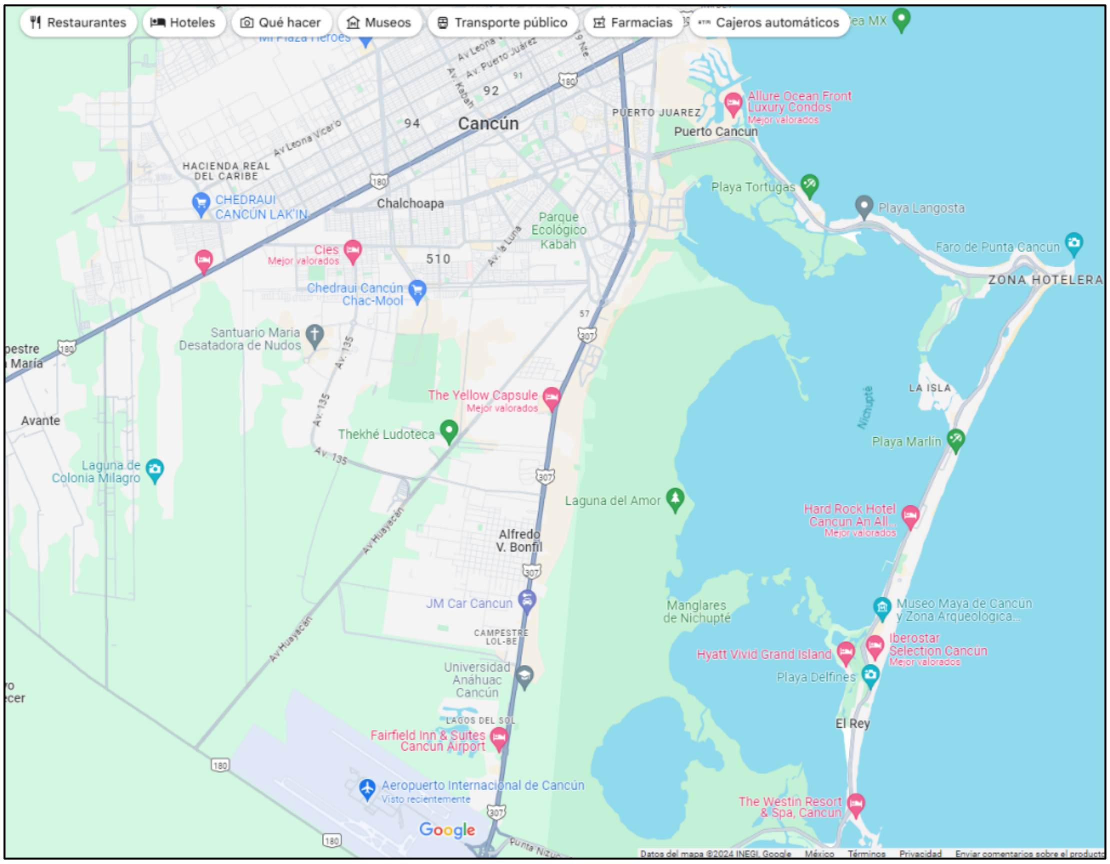
¿Conoces Cancún?

Con esta actividad, en vinculación con contenidos del Campo formativo Ética, Naturaleza y Sociedades, las y los estudiantes, organizados en parejas, interpretan

[7] Tomada y adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 99-101). México.

información de mapas reales y reflexionan sobre la manera de comunicarla. Ello implica que distingan elementos convencionales como iconos para identificar lugares de interés, el código para distinguir las calles o avenidas principales de las secundarias, algunas vías de transporte, etcétera.

Observen el siguiente mapa de Cancún, Quintana Roo[8] y respondan las preguntas.



1. ¿Qué semejanzas o diferencias encuentran respecto a otros mapas que hayan visto?
2. ¿Qué símbolos observan? ¿Cuál es su significado?
3. ¿Qué sitios de interés identifican en el mapa?
4. En el mapa se distinguen dos carreteras, ¿cuáles son?
5. Mencionen dos avenidas principales. ¿Cómo las distinguieron?

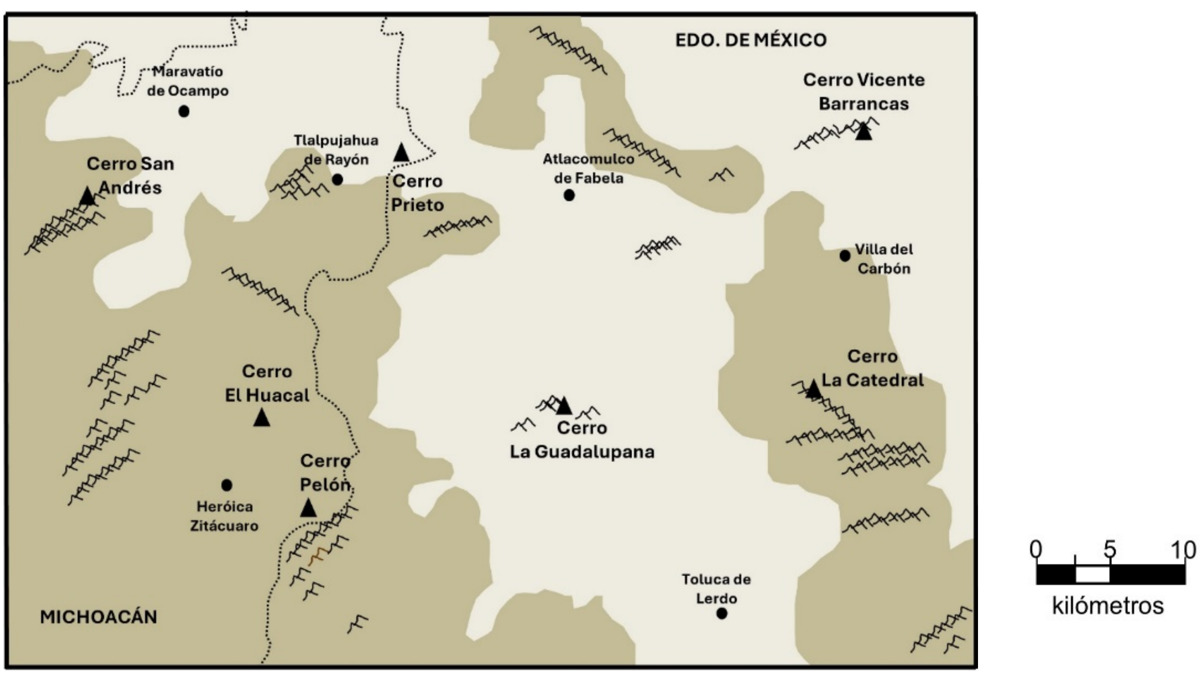
[8] Google. (s.f.). [Mapa de Cancún, México en Google maps].

6. ¿Cómo llegarían al Parque ecológico Kabah si están en el Aeropuerto Internacional de Cancún?

Ruta de los Cerros[9]

Se trata de que las y los estudiantes se organicen en equipos de tres integrantes para participar y ganar la Ruta de los Cerros. La actividad, vinculada a los contenidos de Números y Relaciones de proporcionalidad, implica varios retos: a) interpretar la escala gráfica del mapa, b) utilizar la escala para calcular distancias; c) determinar la ruta más larga que se pueda formar con las cinco distancias calculadas.

- El desafío consiste en describir una ruta que incluya a cinco de los siete cerros que se observan en el mapa y con la que se recorra la mayor cantidad de kilómetros posible.
- Todos los equipos deben iniciar su recorrido en el cerro La Guadalupana y terminarlo en el cerro Prieto.



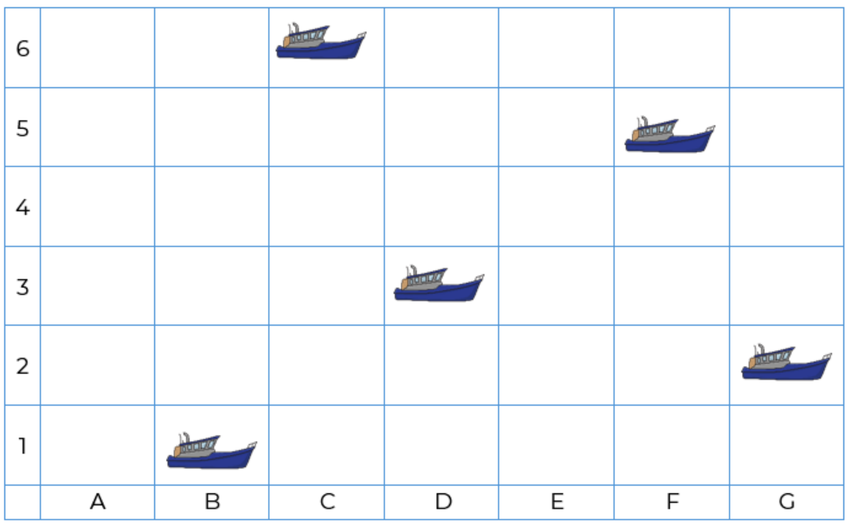
Se espera que las y los estudiantes logren interpretar que una distancia igual al segmento que va de 0 a 10 equivale a 10 kilómetros de distancia real, la mitad equivale a 5 km, la cuarta parte a 2.5 km. Si se cree necesario, antes de calcular las distancias se puede propiciar una discusión grupal acerca del significado del gráfico de la escala.

[9] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 154-155). México.

Una vez que los equipos hayan terminado, las estrategias y los resultados se comparan y argumentan.

¿En dónde está tu barco?[10]

La idea de este juego es que las y los estudiantes establezcan un sistema de referencia que les permita ubicar puntos en un plano cuadriculado. El grupo se organiza en parejas para encontrar los barcos del tablero de otra pareja a través de proponer diferentes posiciones en las que pueden estar ubicados. Antes de iniciar el juego es necesario que todas las parejas ubiquen cinco barcos en su tablero sin que la pareja contraria los vea. Por ejemplo:



Por turnos las parejas dicen la posible ubicación de un barco en el tablero contrario, si atinan, el barco se marca. Gana la pareja que primero encuentre los cinco barcos contrarios. Una vez que las parejas hayan terminado el juego, grupalmente se comentan las estrategias que siguieron para ubicar la posición de los barcos. Es importante que las y los estudiantes concluyan que para ubicar un objeto en una cuadrícula es necesario establecer una coordenada: primero se menciona la casilla que se encuentra sobre el eje horizontal y después, la casilla del eje vertical.

La figura misteriosa[11]

Se trata de que el grupo, organizado en parejas, ubique puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano para descubrir una figura:

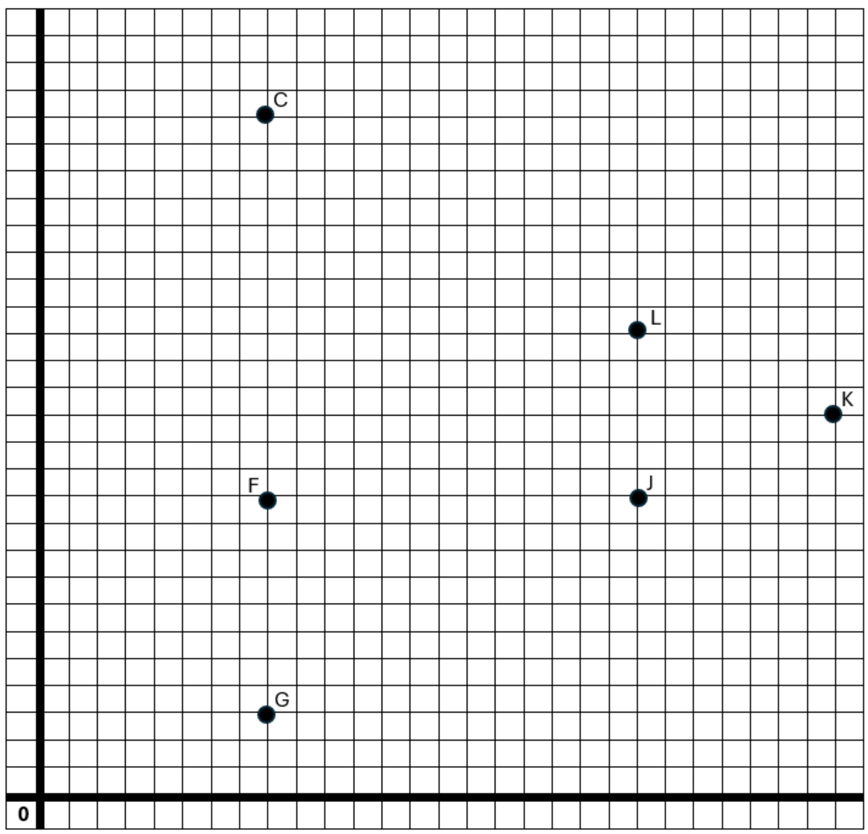
[10] Adaptada de *"Batalla naval"* en Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado. (pp. 47-50). México.
[11] Adaptada de "*Puntos y figuras*" en Secretaría de Educación Pública. (2007). Matemáticas Quinto grado. (pp. 54-55). México

Yair trazó una figura en su plano, para encontrar la figura sigan las instrucciones:

- Localicen en el plano los puntos que están en la tabla. No se olviden de poner la letra que le corresponde a cada punto.
- Escriban en las tablas las coordenadas de los puntos que faltan.

Punto	Coordenadas
A	(21, 25)
B	(14, 21)
C	
D	(8, 17)
E	(1, 14)
F	

Punto	Coordenadas
G	
H	(14, 7)
I	(21, 3)
J	
K	
L	



- Unan con líneas los puntos del A al L siguiendo el orden alfabético; para terminar la figura unan el punto L con el A. ¿Qué figura les salió?

Revise nuevamente la actividad “Ruta de los cerros”.

¿Qué dificultades podrían tener sus estudiantes para desarrollarla? ¿Qué actividades o estrategias implementaría para que ellos superen esas dificultades?

Medición

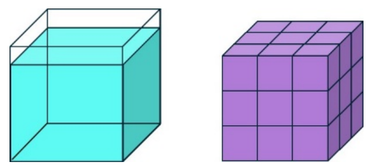
Medir es comparar, determinar cuántas veces un patrón, al que se le denomina unidad de medida, está contenido en un objeto, un evento o un fenómeno. La medición de diferentes magnitudes desarrolla habilidades para seleccionar una unidad apropiada de medida y para elaborar conjeturas acerca de las propiedades físicas de objetos y temporales de eventos, por ello, la medición es una noción que se desarrolla desde la Fase 2.

En las Fases 3 y 4 las y los estudiantes estudian las magnitudes de longitud, masa, capacidad, tiempo, y en particular, en la Fase 4 incorporan los conceptos de perímetro y área, al distinguir el contorno de la superficie de objetos y figuras geométricas. Mediante situaciones que implican estimar y comparar superficies y sus contornos, de manera directa, con unidades no convencionales y retículas, reconocen al perímetro como la suma de las longitudes de los lados de una figura y al área como la medida de la superficie.

Distinguir el perímetro y el área de las figuras no es trivial para niñas, niños y adolescentes, por lo que es necesario tomar en cuenta porque esta habilidad es fundamental para el trabajo de conceptualización y la deducción de fórmulas. En la Fase 5 se continúan trabajando esas nociones con la intención de que las y los estudiantes comprendan que el área de una figura no depende de su perímetro, de la misma forma que su perímetro no depende del área. Además, se avanza en la construcción y uso de fórmulas para calcular el perímetro de cualquier polígono y el área de cuadriláteros, triángulos o de figuras compuestas por estos, así como el uso de unidades convencionales para expresar resultados de mediciones, centímetros (cm) y metros (m) en el caso de perímetros, y de centímetro cuadrado (cm^2) y metro cuadrado (m^2) para áreas.

En la segunda etapa de esta Fase, se inicia el estudio del **volumen** a partir de la resolución de situaciones problemáticas que implican construir, estimar y comparar el volumen de cuerpos y prismas rectos rectangulares mediante el conteo de cubos, con lo que se espera que las y los estudiantes reconozcan que existen diferentes cuerpos con el mismo volumen.

Cabe aclarar que un error común es que se considere capacidad y volumen como sinónimos. La capacidad es la cualidad que tienen los recipientes de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, aserrín, semillas, etcétera), y la unidad fundamental que se utiliza para expresarla es el litro (ℓ). El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo o un objeto, y la unidad de medida fundamental que se utiliza para expresarlo es el centímetro cúbico (cm^3).



Una habilidad relevante para desarrollar en la medición de perímetros, áreas y volúmenes es la **estimación**, ya que favorece la interiorización de la unidad de medida. En este sentido, la variedad y frecuencia de experiencias que niñas, niños y adolescentes tengan con cierta unidad de medida facilita que progresivamente sus cálculos sean más acertados.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la medición de perímetro, área y volumen

- Es importante considerar que los resultados que se obtienen al medir una longitud pueden ser ligeramente diferentes debido a los instrumentos utilizados.
- Incluir situaciones en las que se establezcan equivalencias entre los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) de la unidad de medida de longitud, por ejemplo: 1.25 m equivale a 1 metro con 25 centímetros, que equivalen a 12 decímetros con 5 centímetros, y a su vez son equivalentes a 125 centímetros y enfatizar la relación de sus equivalencias con el sistema decimal de numeración. Motivar la consulta del diccionario sobre el significado de los prefijos de múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida.
- Para introducir la noción de metro cuadrado (m^2) es recomendable dibujar en el piso o construir con cartón, un cuadrado de un metro por lado, la intención es que niñas, niños y adolescentes observen la superficie que ocupa, y lo utilicen para verificar sus estimaciones sobre cuántos metros cuadrados miden algunas superficies cercanas.
- Con relación a la construcción y uso de fórmulas es fundamental que niñas, niños y adolescentes las conciban como una forma sintética que permite calcular un perímetro o un área, después de experimentar diversas estrategias de medición.

- Considerar que una fórmula representa una generalización, por lo que es importante apoyar a las y los estudiantes para que identifiquen cuál elemento de la figura está representado por cada variable (término de la fórmula). Motivar que comparen la fórmula antes y después de sustituir numéricamente sus términos, para introducir el concepto variable, sin que ello implique nombrarlo como tal.

- Es conveniente proponer la resolución de diversas situaciones en las que se requiere conocer la longitud del contorno de superficies cercanas, figuras conocidas como cuadrado, rectángulo, triángulo equilátero, o figuras irregulares (sus lados tienen diferente longitud y sus ángulos tienen diferente medida) para desarrollar la noción de perímetro.

- Proponer situaciones que requieren descomponer una superficie en cuadrados o triángulos, particularmente si se trata de figuras irregulares, así como identificar figuras que tienen la misma área. Esta noción favorece la deducción de fórmulas para calcular el área, a partir de la transformación de una figura en otra con área equivalente, por ejemplo, la transformación de rombos, trapecios, romboides en rectángulos con áreas equivalentes.

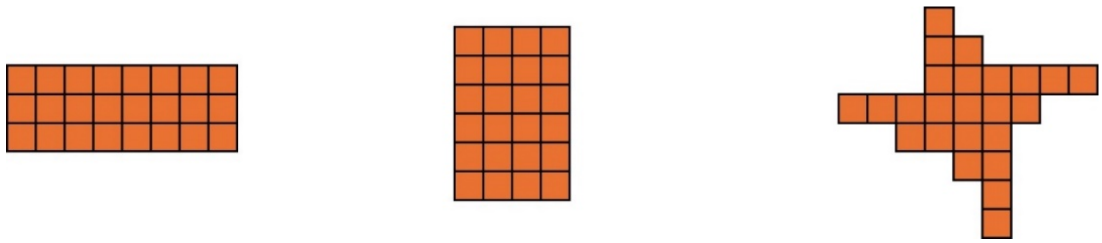
- Propiciar que las y los estudiantes observen y practiquen una forma breve para calcular el perímetro del rectángulo e intenten expresar de manera sintética ese procedimiento. Se busca que las y los estudiantes logren la expresión *2a + 2b*, aunque se espera que intenten y usen expresiones sintéticas del procedimiento, por ejemplo, *el doble del largo + el doble de la altura*. Después, se les comenta que existe una expresión universal para ello y se les da a conocer: *P = 2a + 2b*, señalando que en la relación ***a*** representa la medida de uno de los lados y ***b*** representa la medida del otro lado.

- Plantear actividades que impliquen construir rectángulos con cuadrados del mismo tamaño y que las y los estudiantes identifiquen la relación entre el total de cuadrados de la figura (área) y el número de cuadrados del ancho y del largo.

- Proponer situaciones en las que las y los estudiantes identifiquen la relación que existe entre las medidas del largo, ancho y área de un rectángulo y la representen con una fórmula. Es probable que se pregunten por qué a veces se dice largo y ancho y en otros, base y altura. En este caso se puede decir que estos términos se utilizan indistintamente para designar los lados de un rectángulo, precisando que el “largo” es el lado de mayor longitud y “ancho” el lado más corto. La “base” es el lado horizontal y la “altura” el lado vertical.

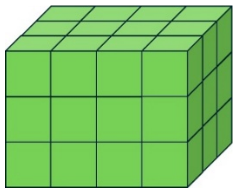
- Se espera que las y los estudiantes comprendan que para obtener el área de cualquier rectángulo se multiplica el largo por el ancho, o bien, la base por la altura. Si los alumnos expresaran la fórmula $A = b \times h$, o $A = l \times a$, conviene señalar que de manera universal se utiliza $A = b \times h$.

- Solicitar que las y los estudiantes construyan diferentes figuras que tengan determinada área; esto es con la finalidad de validar la propiedad geométrica de que la forma es independiente del área. Por ejemplo, representar una figura con 24 cm^2 de área, podría haber soluciones como las siguientes:



- Proponer situaciones que propicien que las y los estudiantes deduzcan la fórmula para calcular el área de figuras geométricas:
  - Rectángulo, a partir de multiplicar la medida de la base por la medida de la altura.
  - Romboide, a partir de la transformación de un rectángulo, multiplicando la medida de la base por la medida de la altura.
  - Triángulo, a partir de la transformación de un rectángulo en dos triángulos iguales.
  - Rombo, a partir de la transformación de un rectángulo en dos rombos iguales, en los que la medida de la diagonal mayor corresponde a la medida del lado de mayor longitud del rectángulo, y la medida de la diagonal menor, a la medida del lado corto del rectángulo.
  - Trapecio, mediante la yuxtaposición de romboides, rectángulos y triángulos.
  - Diferentes figuras conformadas por rectángulos, cuadrados y triángulos, mediante descomposición y composición de áreas.
- Plantear situaciones que lleven a las y los estudiantes a obtener una fórmula para calcular el perímetro de polígonos regulares.
- Como en otras magnitudes, es conveniente desarrollar la habilidad de estimar perceptualmente el espacio que ocupa un cuerpo a través de unidades cúbicas, ya sea de centímetros cúbicos (cm^3), o decímetros cúbicos (dm^3) construidos. También realizar actividades que impliquen construir todos los cuerpos o prismas posibles con la misma cantidad de unidades cúbicas.
- Una actividad recomendable para que niñas, niños y adolescentes identifiquen la diferencia y relación entre el volumen y la capacidad, es construir un cubo de diez centímetros de lado y trasvasar su contenido (arena, aserrín u otro material similar) en recipientes con diferentes formas cuya capacidad sea de un litro, de tal forma que se establezca que 1 dm^3 equivale a un litro.

- Plantear situaciones que impliquen medir el volumen de un cuerpo por medio del conteo de la cantidad de cubos que lo forman; por ejemplo:



Volumen: 36 cubos o 36 unidades cúbicas,
porque: 4 x 3 x 3 = 36

Actividades para el aprendizaje

Las costuras de Paula[12]

Se organiza al grupo en parejas y se propone el problema:

> Paula hace servilletas y manteles de tela. Para decorarlos cose encaje en toda la orilla. ¿Cuánto encaje necesita para un mantel que mide 2.5 m de largo y 1.5 m de ancho?

Una vez que la mayoría haya resuelto el problema, se revisan algunos resultados y procedimientos. Luego, se comenta lo siguiente:

> En el grupo de Rogelio también resolvieron el problema. Su equipo contestó que, para encontrar el resultado, ellos sumaron el doble del largo más el doble del ancho del mantel. ¿Creen que ese procedimiento sea correcto? ¿Por qué?

Si algún equipo coincide con la forma como lo hizo Rogelio es importante que se le anime a comentar porqué decidieron hacerlo así o, si no surge en el grupo este procedimiento, algunas preguntas que pueden ayudar para que reflexionen sobre él son: ¿por qué pensaron que debía ser el doble de este lado?, ¿qué diferencia hay en comparación con las otras formas? Esto es, motivarlos a buscar una explicación que se centre en la relación que existe entre la forma de la figura y sus medidas.

En otro momento, se organiza al grupo en parejas y se proponen tres problemas:

- ¿Cuánto encaje necesita Paula para decorar una servilleta que mide 80 cm de largo y 45 cm de ancho?
- Voy a armar el marco de una ventana que mide 60 cm de largo y 45 cm de ancho, las varillas de aluminio miden 1.5 m. ¿Cuántas varillas de aluminio debo comprar?
- Se va a poner malla alrededor de la cancha de basquetbol de la escuela, si la cancha mide 20 m de largo y 11 m de ancho, ¿cuántos metros de malla se necesitan?

Las parejas se dividen en tres grupos, cada uno se encarga de resolver un problema siguiendo el procedimiento de Rogelio para comprobar su efectividad.

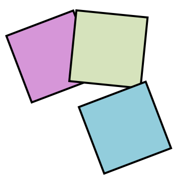
Cuando la mayoría de los equipos haya terminado, comentan cómo aplicaron el procedimiento de Rogelio y los resultados que obtuvieron. Finalmente se motiva al grupo a proponer una forma breve para expresar ese procedimiento.

[12] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado (pp. 262-264). México.

Superficies rectangulares[13]

El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes; cada equipo debe contar con 40 cuadrados de 1 cm por lado, de preferencia de materiales como cartulina, cartoncillo, foamy. Los equipos deben resolver este problema:

> Formen con su material cuatro rectángulos diferentes que tengan un área de 40 centímetros cuadrados; los rectángulos deben tener toda su superficie cubierta. Registren en la tabla las medidas de sus rectángulos.



Largo	Ancho	Área (cm^2)
		40
		40
		40
		40

> ¿Qué relación observan entre los números de la tabla?

Las tablas se revisan grupalmente y se distinguen todas las posibles combinaciones que dan como resultado 40 cm^2. Es importante que los equipos expongan sus hallazgos respecto a la relación que identifican entre los números de la tabla, también precisar que para expresar las medidas de las superficies se utilizan unidades cuadradas, en este caso, centímetros cuadrados (cm^2).

Una variante de esta situación es proponer una tabla como la siguiente y que, con apoyo de su material, identifiquen los datos que faltan:

Área (cm^2)	Largo	Ancho
	7	5
32	8	
110		10
	20	14
96	12	
	25	6

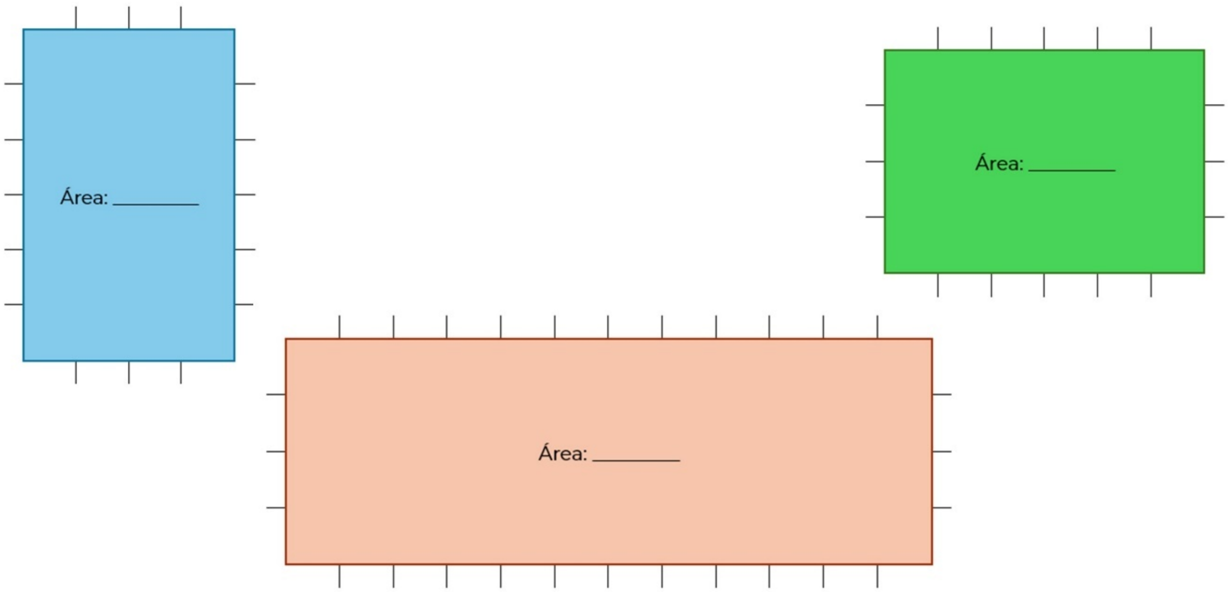
Después de revisar los resultados, se hacen las siguientes preguntas al grupo: ¿Necesitaron el material para completar las medidas de todos los rectángulos?, ¿cómo supieron qué números faltaban?

[13] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado (pp. 267-269). México.

En busca de una fórmula[14]

Al grupo organizado en equipos de tres o cuatro integrantes se le plantea el problema:

Anoten la medida de la superficie de cada rectángulo.



La idea es que en todos los casos las y los estudiantes multipliquen las medidas del largo y el ancho de los rectángulos para encontrar su área.

Es probable que algunos equipos tracen toda la cuadrícula para encontrar el área, algunos otros, tracen solamente los cuadrados de una fila y una columna de la orilla, y otros realicen directamente la multiplicación. Estos recursos serán parte de lo que se destaque cuando se revisen los resultados grupalmente. Es conveniente que se concluya que basta con saber cuántas unidades tienen el largo y el ancho y multiplicarlas para obtener la medida de la superficie de un rectángulo. Finalmente se motiva al grupo a proponer una forma breve para expresar cómo se calcula el área de los rectángulos.

Medidas en el salón de clases[15]

Cada estudiante construye un cuadrado de un metro por lado, 10 cuadrados de 10 cm por lado y 10 cuadrados de 1 cm por lado. Se organiza al grupo en equipos de cuatro o cinco integrantes. El material para construir las figuras puede ser cartulina, hojas de papel recicladas, periódico, foamy, etcétera.

[14] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado (pp. 270-274). México.
[15] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado (pp. 275 a 278). México.

Grupalmente se nombra cada cuadrado y se comentan las características de las tres unidades que se utilizan como unidad para medir superficies:

- Metro cuadrado, cuadrado de un metro por lado, su símbolo es (m^2).
- Decímetro cuadrado, cuadrado que mide 10 cm por lado, su símbolo es (dm^2).
- Centímetro cuadrado, cuadrado que mide 1 cm por lado, su símbolo es (cm^2).

Se invita a los equipos a proponer diferentes objetos o espacios para medirlos utilizando las tres unidades de medida. Para ello, cada equipo construye una tabla como la siguiente y que se presentará en el pizarrón, en la que se enlistan los objetos o espacios a medir, por ejemplo:

Superficie	Unidad que conviene utilizar	Estimación del área	Resultado de la medición
El pizarrón			
La mesa de trabajo			
La portada de un cuaderno			
El piso del salón			
Una ventana del salón			

Las tablas se comparan y comentan grupalmente.

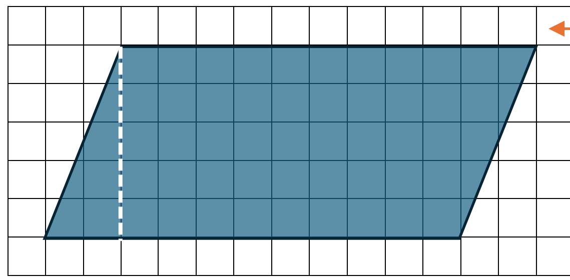
Una variante de esta actividad es que, con el mismo material construido, formen figuras que tengan una determinada área, por ejemplo: 24 cm^2, 8 m^2, 15 dm^2. Esta actividad permite validar una propiedad geométrica de que existen figuras diferentes que tienen la misma área.

El romboide[16]

La idea central de esta actividad es que las y los estudiantes deduzcan una fórmula para calcular el área del romboide. Cada estudiante necesita una hoja cuadriculada, regla, tijeras, lápices de colores, pegamento. Organizados en parejas, el grupo seguirá las instrucciones:

1. Traza y colorea en tu hoja un romboide como este.

[16] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 105-108). México.



2. La línea punteada blanca punteada representa la altura de la figura.
   - ¿Cuánto mide la altura del romboide?, ¿cuánto mide su base?
3. Recorta el triángulo que se formó a partir de la altura trazada (línea punteada).
4. Coloca el triángulo de tal manera que, al unirlo con la otra parte del romboide, se forme un rectángulo. Luego contesta:
   - ¿Cuánto mide la altura del rectángulo que formaste?, ¿cuánto mide su base?
5. Compara las alturas y las bases del romboide y del rectángulo. ¿Cómo son entre sí?
6. Escribe cómo se puede calcular el área de un romboide si conoces la medida de su base y de su altura.

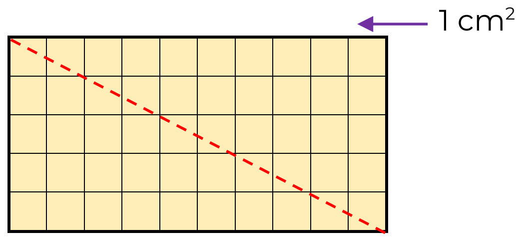
Las propuestas se comparten y se establece una fórmula de manera grupal, las y los estudiantes la registran en su cuaderno y pegan el romboide en su cuaderno. En otra sesión resuelven algunos problemas relacionados con la medición de la superficie de romboides utilizando la fórmula construida.

Divido figuras[17]

Para llevar a cabo la actividad se requiere que las y los estudiantes tengan a la mano tijeras, regla, lápices de colores, pegamento y dos rectángulos como los que se muestran. Organizado en parejas, el grupo seguirá las indicaciones:

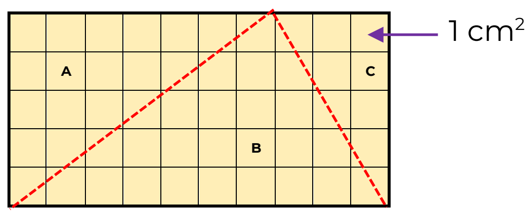
1. En uno de los rectángulos tracen una diagonal como se muestra enseguida y recorten sobre ella. Luego, respondan las siguientes preguntas:

[17] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 156-158). México.



- ¿Cuál es el área del rectángulo?
- Superpongan los triángulos obtenidos. ¿Cómo son?
- ¿Cuál es el área de cada uno?
- Si el área del rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura ($b \times h$), ¿cómo se obtiene el área de un triángulo?

2. En el segundo rectángulo tracen dos rectas como lo indica la siguiente figura y recorten.



- Superpongan los triángulos y determinen el área de los triángulos A, B y C.

Las propuestas se comparten y se establece una fórmula de manera grupal, las y los estudiantes la registran y pegan los triángulos en su cuaderno. En otra ocasión resuelven algunos problemas relacionados con la medición de la superficie de triángulos utilizando la fórmula construida.

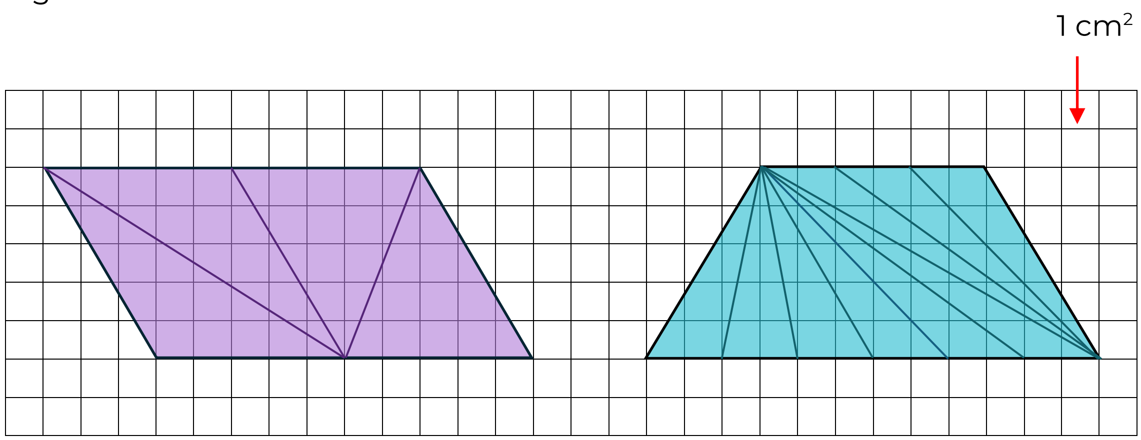
¿Qué cambia?[18]

Con esta actividad se pretende que las y los estudiantes se den cuenta de que los triángulos que forman un romboide o un trapecio tienen la misma base y altura, por consiguiente, tienen la misma área, aunque tengan formas diferentes. Cabe aclarar que cuando los triángulos son congruentes (mismo tamaño y forma) entonces, las áreas son iguales, pero no siempre dos o más triángulos que tienen la misma área, son congruentes.

[18] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 159-161). México.

El grupo se organiza en parejas o equipos de tres estudiantes para resolver el problema:

> El romboide y el trapecio están subdivididos en triángulos. Calculen el área de cada triángulo y el área total de la figura que los contiene. Después respondan las preguntas.



- ¿Cómo son la base y la altura de cada uno de los triángulos que forman el romboide?
- ¿Cómo son las áreas de estos triángulos?
- ¿Cómo son la base y la altura de cada uno de los triángulos que forman el trapecio?
- ¿Cómo son las áreas de estos triángulos?
- ¿Qué podrían concluir respecto al área de los triángulos del romboide y los triángulos del trapecio?

Algunos equipos comentan sus respuestas y conclusiones. Grupalmente se redacta una conclusión a partir de lo propuesto por los equipos.

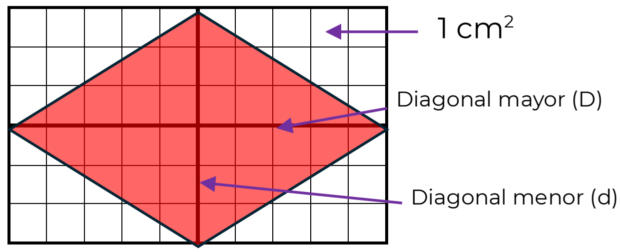
El rombo[19]

La idea de esta actividad es que las y los estudiantes reconozcan que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo que lo circunscribe. Además, que la longitud de la diagonal mayor corresponde a la longitud de la base del rectángulo y la longitud de la diagonal menor del rombo corresponde a la longitud de la altura del rectángulo.

[19] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 109-111). México.

Las y los estudiantes necesitan una hoja cuadriculada, tijeras, lápices de colores, regla y pegamento y, en parejas responden las preguntas y justifican sus respuestas.

1. Tracen dos veces un rectángulo y un rombo como los que aquí se muestran y escriban los nombres que se indican en ambos rombos.



   - ¿Qué relación hay entre la diagonal mayor y la base del rectángulo?, ¿y entre la diagonal menor y la altura del rectángulo?
   - ¿Qué relación hay entre el área del rombo y la del rectángulo?

2. Recorten uno de los rombos y con los triángulos que sobran formen otro rombo igual.
   - Propongan una fórmula que permita calcular el área de un rombo a partir de sus diagonales.

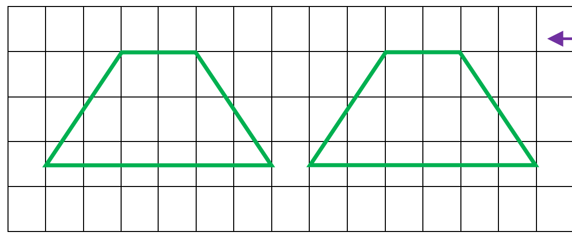
Las respuestas y propuestas se comparten y revisan; se espera que las y los estudiantes concluyan que la fórmula para calcular el área del rombo es: $A = \frac{D \times d}{2}$, pero es posible que algunos equipos comenten que para calcular el área del rombo se puede usar la fórmula que construyeron para medir el área de los triángulos, lo cual es correcto. En ese caso conviene motivarlos a revisar sus respuestas y recuperar los nombres de los elementos del rombo para incorporarlos a la fórmula. Las y los estudiantes registran la fórmula en su cuaderno y pegan los rombos. En otra sesión resuelven algunos problemas relacionados con la medición de la superficie de rombos utilizando la fórmula construida.

Armo figuras[20]

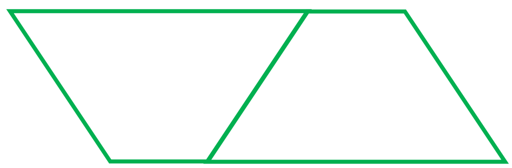
Las y los estudiantes necesitan una hoja cuadriculada, tijeras, lápices de colores, regla y pegamento y, en parejas responden las preguntas y justifican sus respuestas.

1. Tracen dos trapecios iguales como estos:

[20] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 162-166)



Recorten dos, formen un romboide como el que se observa y respondan las preguntas:



- ¿Cuál es el área del romboide?
- ¿Cuál es el área de cada uno de los trapecios?
- Si la base del romboide está formada por la suma de la base mayor y la menor del trapecio, ¿cómo se obtiene el área de un trapecio?

Es importante resaltar que la base del romboide que se forma es la suma de las dos bases del trapecio; es decir, el área del romboide es $A = b \times h$, por lo tanto,

$b = B + b$ y h es la altura del trapecio; entonces, el área de un trapecio es igual a: $\frac{(B+b)h}{2}$

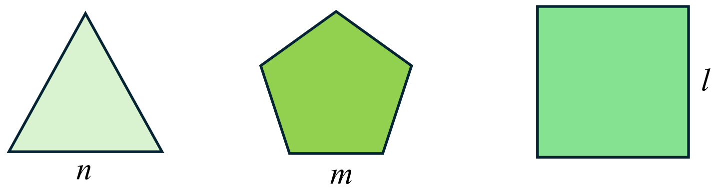
Las y los estudiantes registran la fórmula en su cuaderno y pegan los trapecios. En otra sesión resuelven algunos problemas relacionados con la medición de la superficie de trapecios utilizando la fórmula construida.

Hagámosla más fácil[21]

La idea es que, con esta actividad, las y los estudiantes reconozcan que sumando las medidas de todos sus lados de la figura se obtiene el perímetro y obtengan una fórmula para calcular el perímetro de cualquier polígono regular. Para ello, las y los estudiantes se organizan en equipos de tres integrantes y resuelven los problemas:

> Analicen las siguientes figuras que representan tres jardines. Cada forma tiene lados iguales. ¿Habrá alguna forma de medir el perímetro de cada figura sin necesidad de medir cada uno de los lados?

[21] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado. (pp. 219-221), México.



Si en cada figura se representa la medida de unos de sus lados con una letra, escriban una fórmula utilizando la letra para calcular el perímetro de cada una de las figuras.

Triángulo equilátero: ________________ Cuadrado: ________________

Pentágono regular: _________________

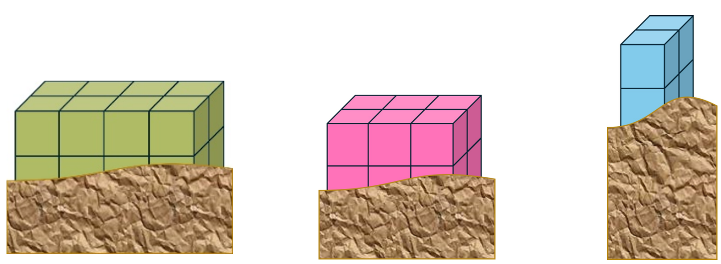
Si la mayoría de estudiantes expresan las fórmulas en forma de sumas y no como producto, por ejemplo, $l + l + l + l$, es importante motivarlos a utilizar las expresiones equivalentes: $3n$ y $3 \times n$. Conviene precisar que la forma más abreviada y que generalmente se utiliza en la fórmula es $3n$ o $3l$, donde n y l representan la medida de un lado del triángulo equilátero.

Una variante de esta actividad es que se presente a las y los estudiantes diversas figuras tanto regulares como no regulares en las que las medidas de sus lados se representen con literales y que obtengan una fórmula que representa su perímetro.

Cubos escondidos

La intención es que las y los estudiantes desarrollen estrategias para calcular el volumen de prismas rectangulares. El grupo se organiza en equipos de tres integrantes para resolver el problema:

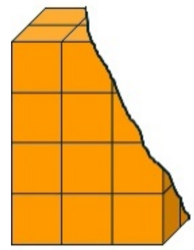
1. En la figura de abajo hay tres prismas en los que sólo se ve una parte. El volumen de dos de ellos es de 18 cubos. Identifiquen cuáles son:



- Si la arista de uno de los cubos se toma como unidad, ¿cuánto miden de altura los dos prismas del inciso anterior?
- De estas medidas, subrayen cuáles podrían ser el volumen del prisma verde y cuáles no:

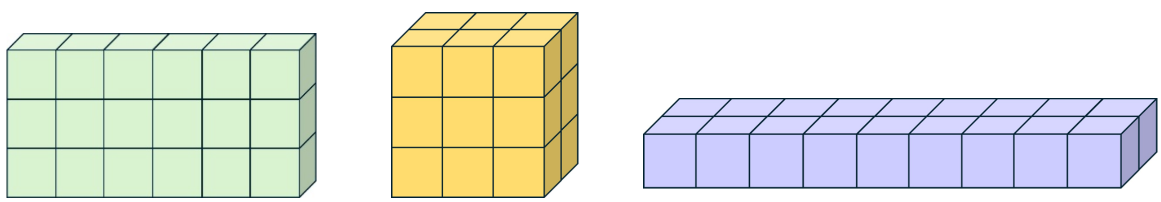
32 cubos 20 cubos 28 cubos 40 cubos

2. La siguiente figura representa un prisma destruido. ¿Cuántos cubos tenía de volumen?



Diferentes pero parecidos

El grupo se organiza en equipos de tres integrantes. Cada integrante necesita 6 cubos que midan 5 cm por cada lado. Se trata de que las y los estudiantes construyan diferentes cuerpos geométricos que tengan el mismo volumen, de modo que puedan apreciar que varios cuerpos geométricos pueden tener el mismo volumen pero diferente forma. Para ello, se pide a los equipos que construyan, por ejemplo tres prismas diferentes que midan 18 unidades cúbicas cada uno y que registren sus medidas. Algunos equipos describen al grupo uno de sus prismas y lo vuelven a construir para que el grupo lo compare con los propios. Grupalmente se registran todos los prismas posibles de construir que midan 18 unidades cúbicas.



De las actividades de aprendizaje descritas, ¿cuál o cuáles considera que podría poner en práctica con su grupo?, ¿haría algún ajuste?, ¿cuál?

Organización e interpretación de datos

En fases anteriores, las y los estudiantes han elaborado registros de datos mediante recursos como pictogramas, tablas; por otra parte, han recolectado, organizado, representado e interpretado datos en tablas, pictogramas o gráficas de barras para responder preguntas de su interés.

En esta Fase se busca profundizar en conocimientos y habilidades relacionadas con la recolección, organización y análisis de datos en tablas de frecuencias y gráficas de barras (tanto en su lectura, como en su elaboración), y propiciar que niñas y niños elaboren conjeturas, resuelvan problemas, tomen decisiones, produzcan y comuniquen información cuantitativa y cualitativa contenida en diversos portadores de información. Todo ello favorece el desarrollo del **razonamiento estadístico**.

Desarrollar conocimientos y habilidades estadísticas es fundamental para cualquier campo de conocimiento. Por ello, **la estadística**, es una materia **interdisciplinar** útil en otras áreas de conocimiento donde se convierte en herramienta de resolución de problemas, ya que permite comprender información generada con base en ciertos datos sobre un tema y, con ello, tomar mejores decisiones.

La estadística se divide en dos grandes ramas: la estadística descriptiva y la estadística inferencial, la primera es la que se estudia en la Educación Básica. La estadística descriptiva proporciona herramientas y técnicas para recopilar, ordenar, representar, analizar, obtener y sintetizar un conjunto de datos numéricos con el objetivo de comprenderlos, transmitir de forma clara y eficaz sus características fundamentales, y con ello, generar información y tomar decisiones. En este tipo de estadística se distinguen tres categorías: Distribución de frecuencias, medidas de tendencia central y medidas de variabilidad:

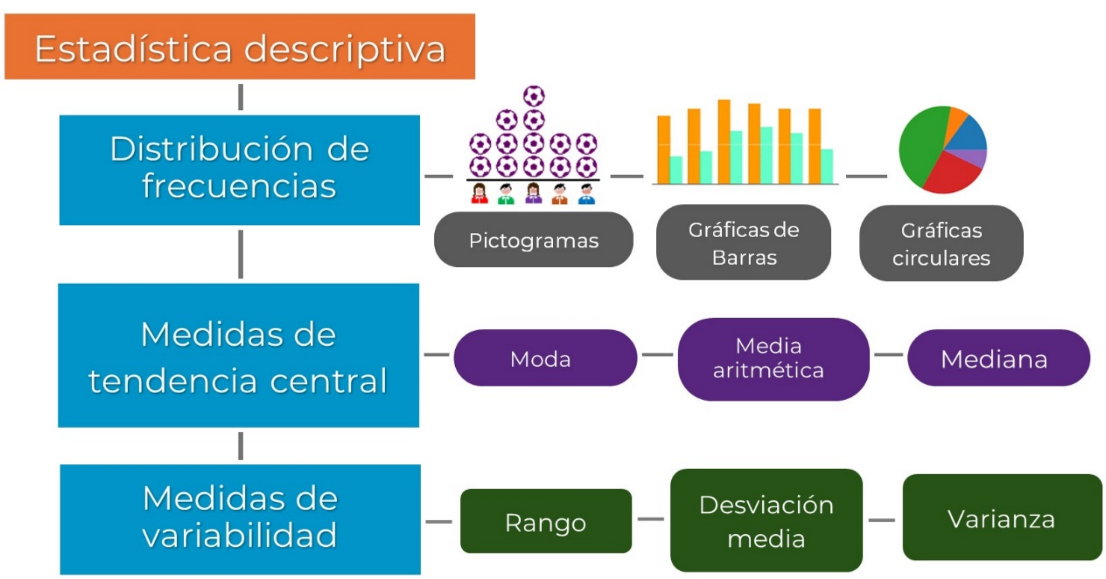


Diagrama 2. Estadística descriptiva. Creación equipo académico DGDC Primaria

El estudio de la estadística descriptiva en Educación Primaria se centra en:

- La distribución de frecuencias (pictogramas, gráficas de barras y gráficas circulares)
- Dos de las tres medidas de tendencia central (moda y media aritmética)
- Una medida de variabilidad (rango)

Las y los estudiantes han trabajado desde Fases 3 y 4 la interpretación de tablas de frecuencias, pictogramas y gráficas de barras, además de la moda. En esta Fase se avanza hacia la construcción de tablas y gráficas de barras, en la interpretación de información cuantitativa y cualitativa contenida en ellas, así como en gráficas circulares. En lo que respecta a las medidas de tendencia central, además de la moda, se estudia la media aritmética (promedio) y en cuanto a las medidas de variabilidad, sólo se estudia el rango. La mediana es motivo de estudio en la Fase 6.

El trabajo de análisis de información es un aspecto que debe propiciarse a lo largo de la Fase. Actividades como, plantear preguntas a partir de la información contenida en ilustraciones y documentos, identificar preguntas que pueden o no responderse con la información de una imagen, texto o gráfica, reflexionar sobre los datos que son útiles para resolver un problema, los que no lo son y los que faltan, ayudan a que niñas, niños y adolescentes desarrollen su capacidad de análisis y resolución de problemas.

La **moda** es el dato que aparece en el conjunto con mayor frecuencia y tiene las siguientes propiedades: a) no requiere cálculo alguno, b) puede que no exista en un conjunto de datos, c) puede no ser única, cuando existen dos o más modas se dice que el conjunto de datos es bimodal.

La **media aritmética o promedio** de un conjunto de datos numéricos es la suma de todos los datos entre el número de ellos. La media aritmética tiene estas propiedades: a) representa a todos los datos numéricos, b) si los datos no son iguales, puede ser un valor diferente a todos los datos numéricos del conjunto, mayor que el dato mínimo y menor que el dato máximo del conjunto, c) si todos los datos son iguales, la media aritmética es igual a ellos.

En estadística se utilizan parámetros que son útiles para conocer cómo se comportan y evolucionan diferentes conjuntos de datos, principalmente los que representan muestras (grupos más o menos representativos de una población / universo amplio, que se establecen para tener una cantidad de datos más manejable, idealmente seleccionados al azar). En este sentido, el **rango** es un parámetro que permite observar de manera rápida y sencilla qué tanta variabilidad existe en los datos y con ello, valorar si el conjunto es homogéneo, lo que significa que los datos son cercanos entre sí y el atributo estudiado es característico de la muestra.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la organización e interpretación de datos:

- Antes de construir gráficas de barras, proponer situaciones que impliquen interpretar las que se encuentren en diferentes medios (revistas, libros, folletos, periódicos), para dar respuesta a preguntas que se respondan directamente con los datos presentados o que requieran hacer cálculos con ellos, así como preguntas que no pueden responderse con la gráfica. A la vez, motivar la reflexión sobre los elementos que la componen.

- Propiciar situaciones que requieren gráficas de barras para representar los datos recolectados sobre un tema del que se quiere tener información. Es fundamental que las gráficas se analicen colectivamente a fin de lograr que comuniquen con claridad la información que se desea, porque se apegan a las convenciones: Título o nombre de la gráfica, Eje horizontal (categorías o tipos de datos), Eje vertical (escala que indican la frecuencia de los datos), Barras o columnas (la frecuencia de un dato). Enfatizar la importancia de que la altura de las barras sea precisa, ya que debe permitir una apreciación visual correcta de la información y esto depende de la escala que se elija.

- Es recomendable que se trabaje con datos provenientes de diversas fuentes (revistas, libros, folletos, periódicos, o encuestas realizadas por el grupo) con la intención de resolver problemas cercanos a la realidad de niñas, niños y adolescentes o producir información. Motivar que los datos se organicen en tablas y gráficas de barras, y se analicen sus tendencias, como son la moda y la media aritmética y el rango.

- Una gráfica circular, también llamada de pastel, se utiliza para representar frecuencias relativas, es decir porcentajes, mediante sectores de un círculo. El círculo completo representa la totalidad de los datos recabados, es decir, el 100 %, y el área de cada sector la frecuencia o porcentaje de cada categoría.

- El objetivo principal del estudio de la moda, la media aritmética y el rango, es que las y los estudiantes desarrollen habilidades para comunicar y evaluar críticamente información, y tomen decisiones acertadas, así como que valoren el papel que juega la estadística en la sociedad. Esto puede lograse con la participación en proyectos en los cuales participen recolectando sus propios datos, a partir de observar, realizar encuestas y mediciones, analizar datos, elaborar conclusiones y confrontar sus ideas iniciales con los resultados.

- Plantear situaciones que permitan reflexionar sobre el valor estadístico que mejor representa al conjunto de datos y determinarlo:

- Estas son las estaturas de ocho niños de 6° B: 1.54 m, 1.51 m, 1.66 m, 1.60 m, 1.72 m, 1.72 m, 1.68 m, 1.62 m. ¿Cuál valor crees que representa la estatura de esos niños de 6° B, la moda o la media aritmética? ¿Por qué?

- Importante hacer conciencia en niñas, niños y adolescentes de que cada dato forma parte de un conjunto, de un todo (distribución de los datos), la tendencia y variabilidad de los datos son aspectos que permiten responder preguntas o comparar varios conjuntos, por ello hay preguntas que no pueden contestarse con un sólo dato, sino con su distribución.

- El rango se obtiene al calcular la diferencia entre el dato de valor más alto y de menor valor, si la diferencia es poca, la muestra es homogénea y ello indica que los datos se pueden considerar característicos de ese conjunto:

  - En una encuesta que se realizó en el grupo de Fabiola se obtuvo que la estatura de las y los estudiantes va desde 1.37 m hasta 1.60 m. Para calcular el rango de estas medidas, se toman ambos datos, ya que representan la mínima y la máxima estatura y se calcula la diferencia: 160 – 137 = 23. El rango es 23, es decir, las estaturas de las y los estudiantes de ese grupo, incluyendo a Fabiola, varía en un rango de 23 centímetros, lo que lleva a considerar que la estatura de entre 1.37 m y 1.60 m es característica de las y los estudiantes de ese grupo.

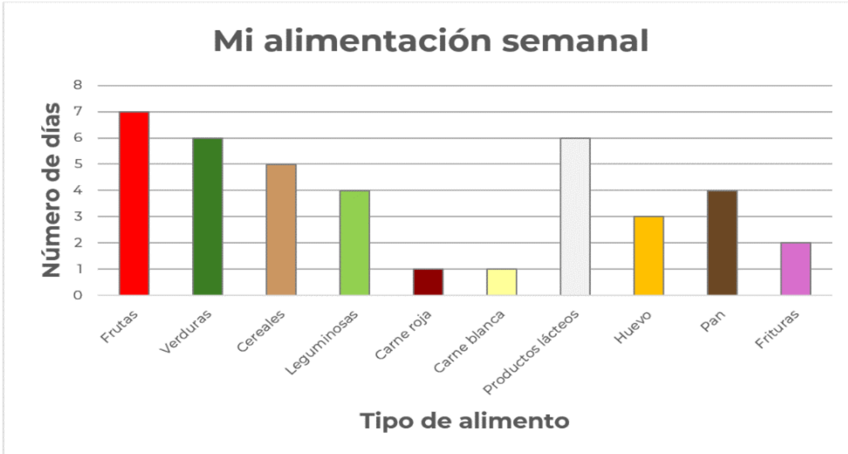
- Considerar que las preguntas o problemas que originen un proceso estadístico tengan un propósito claro, enunciar por qué es importante o necesario abordarlo. La recomendación es que la pregunta o el problema sea interesante, que no sea tan fácil que no implique realizar alguna indagación, ni tan difícil que sea imposible resolverlo. Las fuentes de datos deben ser accesibles: mediante una encuesta, la observación de algún fenómeno, revistas, o bases de datos de instituciones confiables como INEGI, CONAPO, SEGOB, SEP, CONABIO, NASA, entre otras.

Actividades para el aprendizaje

Hábitos alimentarios

Se presenta al grupo la siguiente situación:

Ixchel realizó una encuesta para conocer los hábitos de alimentación de niñas, niños y adolescentes. Con la información que generó realizó una gráfica de barras:



Y se organizan parejas para responder preguntas como:

- ¿Qué alimentos se consumen menos?, ¿cuáles se consumen más?
- Tomando como referencia el Plato del Bien Comer, ¿la información corresponde a una alimentación equilibrada?
- ¿La información representada corresponde a una semana o mes?

Las respuestas se comparan y se invita a las y los estudiantes a elaborar enunciados a manera de conclusiones. También se puede pedir propongan dos preguntas más que se respondan con los datos de la gráfica y dos que no se respondan.

Por otro lado, con la actividad también se espera que contrasten hábitos de alimentación con las características de la dieta correcta (variada, completa, equilibrada, inocua, suficiente) y tomen decisiones respecto a la modificación de sus hábitos en beneficio de una alimentación saludable:

¿La medida sí representa?

Se trata de proponer al grupo, organizados en parejas o grupos de tres integrantes una situación que implica validar si una medida de tendencia central representa un conjunto de datos:

Un estudio encontró que las y los estudiantes de escuelas primarias ven en promedio 3 horas diarias de televisión.

a) ¿Cuál de estas tres opciones podría explicar qué significa “en promedio 3 horas de TV diarias” en el enunciado?

   - Las y los estudiantes ven la TV aproximadamente tres horas diarias.
   - La mayoría de las y los estudiantes ve la TV tres horas diarias.

– La mitad de las y los estudiantes ven la TV tres horas diarias.

b) ¿Cómo creen que se obtuvo este promedio?

Se pide a los equipos que argumenten sus respuestas. Sobre las opciones para responder la pregunta del inciso a, es importante motivar la reflexión entre las y los estudiantes acerca de que podría haber estudiantes que no vean la TV o que la vean durante 8, 9, 10 horas diariamente, aunque el promedio del conjunto de datos sea 3. Esta situación es un ejemplo de la importancia de contar con los datos para llegar a conclusiones significativas respecto a tema que se analiza.

Información disponible en diversas fuentes

Se entrega a las y los estudiantes, integrados en parejas, una hoja impresa con esta información:

En un estudio sobre los manejos de residuos sólidos, se llegó a los siguientes resultados:

Residuos Sólidos Urbanos por subproducto[22].

Categoría	Subproducto	Porcentaje
Susceptibles de aprovechamiento 39.57 %	Cartón	6.54
	Papel	6.20
	Material ferroso	2.09
	Material no ferroso	0.60
	Plástico rígido y de película	7.22
	Envase de cartón encerado	1.50
	Fibras sintéticas	0.90
	Poliestireno expandido	1.65
	Hule	1.21
	Lata	2.28
	Vidrio de color	2.55
	Vidrio transparente	4.03
	Poliuretano	2.80
	Material de construcción	1.46
Orgánicos ______ %	Cuero	0.51
	Fibra dura vegetal	0.67
	Residuos alimenticios	25.57
	Hueso	0.59
	Residuos de jardinería	9.38
	Madera	1.25
Otros ________ %	Residuo fino	3.76
	Pañal desechable	6.52
	Algodón	0.70
	Trapo	3.57
	Loza y cerámica	0.55
	Varios	5.90
Total		100 %

[22] Fuente: Ruiz Vicente, M. (2020) Estado actual de la contaminación ambiental presente en la Mixteca Oaxaqueña. JONNPR. 2020;5(5):535-53. DOI: 10.19230/jonnpr.3257

Y se pide que:

- Respondan las preguntas:
  - ¿Cuál es el residuo sólido con mayor porcentaje?, ¿a qué grupo pertenece?
  - ¿Cuál es el residuo sólido con menor porcentaje?, ¿a qué grupo pertenece?
  - ¿Cuáles de estos residuos sólidos podrían derivarse de su casa?
- Comprueben si la suma de los porcentajes del primer grupo de subproductos es igual al porcentaje de su categoría.
- Calculen cuál es el porcentaje de las categorías “Orgánicos” y “Otros”.

Las respuestas se comparan y se invita a algunas parejas a explicar cómo supieron los valores faltantes. Después, se motiva al grupo a comentar qué saben acerca de lo que sucede con los residuos sólidos que se recolectan en su comunidad (este podría ser tema de un proyecto) y si tiene propuestas que puedan poner en práctica tanto en escuela como en casa para reducir la generación de estos residuos.

Observaciones directas

Se propone una situación en la que las y los estudiantes determinen cuál es la medida de tendencia central que más representa a un conjunto de datos.

> Varios equipos midieron la masa de un objeto pequeño utilizando el mismo tipo de instrumento de medida. Los resultados (en gramos) que los equipos registraron se muestran a continuación.
>
> 6.1, 6.0, 6.0, 6.5, 8.4, 6.3, 6.3, 6.0, 6.2, 6.4, 10.1, 6.0, 6.5, 15.2, 6.5
>
> ¿Cuál es el valor estadístico (moda, media aritmética) que mejor representa la masa del objeto? Para argumentar su respuesta tomen en cuenta el rango.

El agua

Conviene realizar esta actividad en varias sesiones. Primero se invita a las y los estudiantes a que, a través de entrevistas que realicen a cinco familiares o personas cercanas, averigüen si tienen acceso al agua y con qué frecuencia y, cuáles son las principales actividades que llevan a cabo en las que utilizan agua.

Después, se organiza al grupo en equipos de cuatro integrantes y se pide que organicen los datos recabados en tablas de frecuencias y calculen qué tanto por ciento representa cada actividad del total de respuestas obtenidas.

Los equipos presentan sus tablas y resultados de cálculos, explicando cómo construyeron las tablas, qué tomaron en cuenta para organizar los datos, cómo calcularon los porcentajes. Las tablas y resultados obtenidos quedan a la vista del grupo para que cada equipo las analice a partir de preguntas como:

- ¿Son más o son menos las personas que tienen acceso al agua?
- ¿Cuántas actividades diferentes en las que se requiere del agua se llevan a cabo?
- ¿Cuáles son las actividades que coinciden con los resultados de su equipo?, ¿cuáles son diferentes?
- ¿Cuál es la actividad de mayor frecuencia? ¿cuál es la de menor frecuencia?

También se pide a los equipos que, a manera de conclusión de su investigación presenten los datos en una gráfica de barras y redacten dos o tres enunciados que puedan resumir sus respuestas y lo observado en las gráficas. Finalmente, los equipos presentan sus conclusiones al resto del grupo.

Edades de egreso

Se entrega a las y los estudiantes, integrados en parejas, una hoja impresa con esta información:

En una investigación sobre las edades de las y los adolescentes que egresan de la primaria, de un grupo de 34 estudiantes, se obtuvo la siguiente información:

EDADES DE ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO AL TERMINAR EDUCACIÓN PRIMARIA

Se pide a las parejas que registren en una tabla la cantidad de estudiantes por edad que hay en ese grupo hay de cada edad.

Edad de los estudiantes	10 años	11 años	12 años	13 años
Número de estudiantes				

También, que califiquen de "Verdadera" o "Falsa" algunas proposiciones y argumenten por qué la consideraron de esa forma. Los enunciados pueden ser, por ejemplo:

- 26 de cada 100 estudiantes egresan de la primaria con 11 años de edad.
- 1 de cada 100 estudiantes termina la primaria con 10 años de edad.
- Menos de la mitad del total de estudiantes termina a los 12 años.

Se pide a algunas parejas que presenten sus respuestas y argumentos.

Seleccione una actividad para el aprendizaje. ¿Qué adecuaciones le haría para desarrollarla con su grupo?

Nociones de probabilidad

Las y los estudiantes inician el estudio de la probabilidad en esta Fase con el propósito de desarrollar habilidades que les faciliten reconocer, comprender y comunicar información relacionada con situaciones de la vida diaria en las que el **azar** y la incertidumbre están presentes. El aprendizaje de la probabilidad proporciona herramientas matemáticas para identificar fenómenos determinísticos y aleatorios, de modo que puedan realizar predicciones sobre la ocurrencia de ciertos eventos en contextos cercanos. En ese sentido, contribuye al desarrollo del pensamiento crítico

Los **fenómenos determinísticos** son aquellos que con seguridad ocurren y son predecibles, por ejemplo, después de la noche ocurre el día o, si el hielo se expone al calor, se derrite. En contraste, los **fenómenos aleatorios** son los que tienen distintos resultados posibles y, entre todos ellos, uno puede presentase, pero sin la certeza de cuál ocurrirá, es decir, en estos influye el azar, por ello no se pueden predecir, por ejemplo, saber cuál número ganará un sorteo de lotería o, si la cosecha del próximo año será más abundante que la de este. A los resultados posibles de un fenómeno aleatorio se le llama **evento**.

Para alcanzar una comprensión adecuada de la probabilidad y comunicar los posibles eventos, las y los estudiantes requieren asimilar cierto lenguaje diverso y especializado: *verbal,* referente a los términos y expresiones verbales; *numérico,* que facilita cuantificar las posibilidades de que ocurra determinado suceso, así como la posibilidad de probabilidades; *tabular*, que se refiere a la utilización de tablas para la presentación de frecuencias relativas; *gráfico,* que se relaciona con las diferentes representaciones gráficas utilizadas para estimar la probabilidad de que ocurra un evento, pueden ser pictogramas, gráficas de barras y diagramas de árbol; *simbólico,* que refiere al conjunto de símbolos que se emplean para comunicar la ocurrencia de un suceso.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la noción de probabilidad

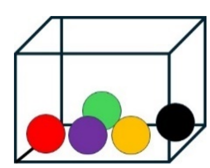
- La probabilidad se asocia con lo **incierto**, es decir aquello que se ubica entre lo seguro y lo imposible. Para describirla se emplean términos como: *es probable que, es posible que; se espera que; estamos casi seguros de que, hay alguna posibilidad que,* etcétera. Un problema fundamental es cómo saber cuál de dos sucesos es más probable.

- Hay fenómenos aleatorios en los que es más fácil predecir resultados que en otros, por ejemplo, es más fácil saber el resultado de un “volado” que saber si una señora o un señor será el primero en subir al camión en el que yo viajo.

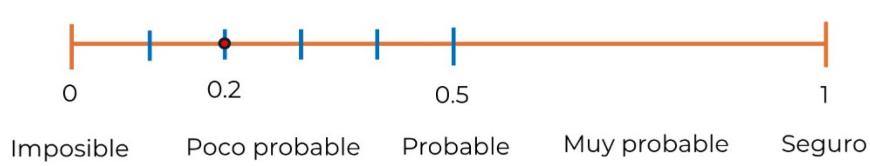
- Un evento es el resultado posible de un fenómeno aleatorio, por ejemplo, al lanzar un dado y esperar que caiga un número par, puede salir 2, 4 o 6, cada número es un evento. En este caso, los tres números son **equiprobables** porque tiene la misma posibilidad de salir ya que en el dado solo aparecen una vez. El conjunto de todos los eventos de un fenómeno aleatorio se conoce como **espacio muestral.**

- La probabilidad de un evento se expresa con una fracción, un número decimal o un porcentaje; este número es la medida cuantitativa de que el evento puede o no ocurrir. Por ejemplo:

  La probabilidad de sacar con los ojos vendados una pelota roja, es $\frac{1}{5}$, porque solo hay una roja (resultados favorables) entre 5 pelotas (resultados posibles).



  El resultado se puede representar en una recta numérica, en la que 0 es *imposible* de que la pelota sea roja y 1 es *seguro* que sea roja:



  En este caso, es poco probable sacar una pelota roja con los ojos vendados.

- Cuando la predicción de un suceso o evento está basada en las creencias y sentimientos personales, se habla de una probabilidad subjetiva. Este método se utiliza cuando un evento sólo ocurre una sola vez, muy pocas veces o cuando no hay información que permita predecir con mayor certeza. Por ejemplo, creer que en Ciudad de México habrá un temblor en el mes de septiembre.

- Iniciar el estudio de la probabilidad de manera informal, por medio de actividades o situaciones centradas en los juicios de las y los estudiantes, con base en sus propias experiencias. Incorporar el lenguaje probabilístico progresivamente para avanzar en la construcción del conocimiento sobre probabilidad, de modo que el lenguaje matemático no sea una barrera para el aprendizaje.

- Conviene introducir la noción de azar a partir de juegos en las que no es posible saber quién gana, por ejemplo, lanzar dados, “Volados”, ruletas, extraer boletos de una urna. Y también, juegos en los que al poner en práctica una estrategia se gana, como “Gato”, “Carrera a diez”, “Dominó”. Motivar la reflexión acerca de si se gana por pura suerte o por una estrategia.

- Al inicio de la Fase se puede asociar el término azar con un fenómeno en el que interviene la “suerte”, sin embargo, es necesario que paulatinamente se conciba como “aleatorio”, es decir, que, ante ciertas condiciones, el fenómeno puede presentar resultados diferentes.

- En un primer momento, invitar a las y los estudiantes que propongan situaciones en las que se sabe qué pasará y en otras en las que no es posible saber, no por falta de información, sino porque se trata de una situación de azar. Posteriormente, favorecer el desarrollo de la capacidad de predicción sobre resultados, al presentar situaciones en las que las y los estudiantes califiquen un evento como seguro, imposible, probable, muy probable o poco probable que suceda.

- Es importante que se propicie la construcción de tablas de frecuencia para registrar los resultados de juegos o eventos aleatorios y que se identifique la **frecuencia absoluta** (número de veces que se repite un resultado) y la **frecuencia relativa** (la proporción que representa la frecuencia absoluta en relación con el total de resultados obtenidos). Por ejemplo: De 25 volados, 14 veces cayó águila, la frecuencia absoluta del resultado “águila” es 14, y la frecuencia relativa de ese resultado es 14 de 25, que es lo mismo que $\frac{14}{25}$.

- Es conveniente propiciar el uso de recursos propios para representar y simbolizar los resultados de un experimento aleatorio, y proponer la construcción de diagramas de árbol o tablas de doble entrada como otros recursos que posibilitan la observación de todos los resultados posibles.

Resultados posibles al lanzar dos monedas al mismo tiempo

	Resultados			
	1	2	3	4
Moneda 1	ÁGUILA	ÁGUILA	SOL	SOL
Moneda 2	SOL	ÁGUILA	ÁGUILA	SOL

- Las reglas de probabilidad de dos o más situaciones simultáneas, bajo condiciones de independencia y dependencia (Probabilidad condicional), no son temas de estudio en esta Fase.

El siguiente fragmento es parte del texto "Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo"[23] de Carmen Batanero.

Probabilidad en la vida cotidiana

El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad, por ejemplo, el pronóstico del tiempo, diagnóstico médico, estudio de la posibilidad de tomar un seguro de vida o efectuar una inversión, evaluación de un estudiante, etc. No sólo los profesionales, sino cualquier persona ha de reaccionar a mensajes en que aparecen estos elementos, tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En estas situaciones la probabilidad no es una propiedad física tangible, por tanto objetiva de los sucesos que nos afectan (como sería el peso, color, superficie, temperatura) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no).

Tabla 1. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la Probabilidad

Significado	Campos de problemas	Algoritmos y procedimientos	Elementos lingüísticos	Definiciones y propiedades	Algunos conceptos relacionados
Intuitivo	Sorteos Adivinación	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas, ...	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible, creencia	Suerte Destino
Clásica	Cálculo de esperanzas o riesgos en juego de azar.	Combinatoria Proporciones Análisis a priori de la estructura del experimento	Triángulo aritmético Listado de suceso Fórmulas combinatorias	Cociente de casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones	Registros de datos estadísticos a posteriori Ajustes de curvas matemáticas Análisis matemático Simulación	Tablas y gráficos estadísticos Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Límite de las frecuencias relativas Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos	Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribuciones a priori y a posteriori

[23] Batanero, C. (2006) Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo en P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Axiomática	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios	Teoría de conjuntos Álgebra de conjuntos Teoría de la medida	Símbolos conjuntistas	Función medible	Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

La elusividad del concepto de probabilidad se debe, por un lado a sus diversos significados que afectan al tipo de problemas que se resuelven, la forma de asignar probabilidades e incluso sus propiedades, conceptos relacionados y terminología y que resumimos en la Tabla 1 (Batanero, 2005). El significado matemático-axiomático es un significado estructural, que responde a una problemática de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad. Por otro lado, en la vida real estos significados aparecen con frecuencia mezclados en la misma situación.

Muchos de estos problemas (toma de decisión, efectuar un juicio o una predicción) son abiertos o tienen más de una posible decisión y en su solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemáticos. Entre ellos, encontramos la posible utilidad de una decisión, que no siempre coincide con su esperanza matemática; por ejemplo, al jugar a la lotería, quinielas u otros juegos de azar la esperanza matemática es negativa para los jugadores. El juego se explica porque la utilidad de una posible aunque muy improbable ganancia de una gran apuesta es mayor que la utilidad de una muy probable, pero pequeña ganancia.

La autora afirma que los diferentes significados de la probabilidad con frecuencia aparecen mezclados en una situación de la vida real. ¿Cuáles de los elementos que caracterizan esos significados identifica en situaciones cercanas a usted? ¿Cuáles están presentes en el Programa Sintético de la Fase?

Actividades para el aprendizaje

Seguro, probable o imposible

Con anticipación se preparan de 10 a 15 eventos escritos en tiras de papel, por ejemplo: *En la escuela hay más niñas que niños, después de abril sigue mayo, hay vida humana en el Sol, si dejo caer al piso una botella de vidrio se rompe, si juego dominó* *me toca la ficha blanca*. En el pizarrón se disponen tres espacios: Seguro / Probable / Imposible.

El grupo se organiza en parejas y a cada una se entrega una tira, analiza el evento y lo coloca en la categoría que considera de acuerdo con la posibilidad de que ocurra. Cuando todas las parejas terminan, se analizan los resultados.

Los dados[24]

El grupo se organiza en equipos de tres integrantes. El juego consiste el lanzar un dado 20 veces, pero antes de realizar la actividad, plantear preguntas como: Si lanzamos un dado, ¿sabemos en qué número caerá? Si lanzamos un dado muchas veces, ¿cuál número creen que saldrá más veces?

Los equipos lanzan su dado y registran los resultados en una tabla como la siguiente:

Número de tirada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Puntos que marca el dado																				

Una vez terminado el experimento, los resultados de los equipos se comparan a partir de preguntas como: ¿Cuál es el número que se repitió más veces?, ¿qué número no salió?, ¿resultó lo que creían antes de lanzar el dado?

En el pizarrón se elabora una gráfica de barras con todos los resultados y se analiza con las siguientes preguntas: ¿Qué número se repitió más veces?, ¿qué número se repitió menos veces?, ¿hubo algún número en el que el dado no cayera?, ¿resultó lo que creían antes de lanzar el dado?

Por último, se pregunta nuevamente: ¿Antes de lanzar el dado, se sabe en qué número va a caer?

Carrera de motos[25]

Número de juego	Sol	Águila
1		
2		
3		
4		
5		

Se trata de que las y los estudiantes elaboren hipótesis sobre los resultados de eventos azarosos. El grupo se organiza en parejas y a cada una se entrega: un tablero como el que se muestra, una moneda, dos piedritas, fichas, botones u objetos pequeños para avanzar en las casillas del tablero.

[24] Adaptado de *"Los dados"* en Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado. México.
[25] Adaptado de *"Volados y carrera de autos"* en Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado. México.

 Salida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	META
 Salida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	META

Cada estudiante elige la cara de la moneda con la que jugará ("águila o sol"). Por turnos, lanzan la moneda al aire y cada vez que salga la cara que eligieron, su moto avanza una casilla. La o el estudiante que llegue primero a la meta gana la ronda y, antes de iniciar otra, la pareja registra el resultado en una tabla. Después de cinco rondas, gana la o el estudiante que gane más veces.

Algunos registros se revisan grupalmente a partir de estas preguntas:

- ¿Cuántos juegos se ganaron con sol?
- ¿Cuántos juegos se ganaron con águila?
- ¿Cuál es el número total de soles?
- ¿Cuál es el número total de águilas?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de juegos que se ganaron con sol y con águila?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número total de soles y de águilas?

Al agua patos

El grupo se organiza en parejas, a cada una se entregan dos tableros como el que se muestra y dos dados de puntos, además, cada integrante dispone de 10 patos (piedritas, fichas, botones o cualquier material pequeño para contar). Antes de iniciar, la pareja acuerda si juegan con todos “los patos” o solo con algunos. Las fichas se colocan en las casillas numeradas. Por turnos los integrantes lanzan los dados, la suma de los puntos indica la casilla-pato (si lo hubiera) que se mete al agua. Gana la o el estudiante que primero logra que todos sus patos se metan al agua.

Casillas											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Agua											

Se espera que las y los jugadores adviertan que para ganar, “los patos” se deben colocar en los números que con más frecuencia caen al tirar dos dados.

Carrera de caballos

Se necesita un tablero por cada 6 jugadores y un par de dados de puntos. Cada persona elige dos caballos. Por turnos, las y los jugadores lanzan los dados y la suma de ambos indica el caballo que avanza una posición. Gana la carrera el caballo que primero avance 10 casillas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										

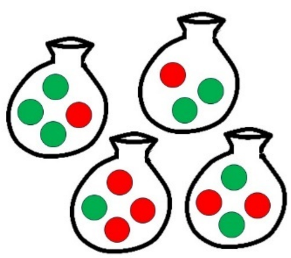
Después de varios juegos, se comenta acerca de qué número de caballo o caballos conviene elegir para tener mayor probabilidad de ganar. Para ello, se determina el espacio muestral con una tabla de doble entrada en la que se registran todos los resultados posibles:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Se observa que hay 36 resultados posibles al lanzar dos dados al mismo tiempo y sumar los puntos que resultan. Se espera que las y los estudiantes concluyan que el número que tiene mayor posibilidad de ganar es el 7, ya que existen 6 casos favorables de 36 posibles resultados, y que el 6 y el 8 también tienen posibilidades de ganar con 5 posibles casos favorables cada uno.

Una variante de esta actividad consiste hacer una carrera en la que participan 6 caballos numerados del 0 al 5. Se lanzan cinco monedas, se cuenta el número de soles que salen y ese número indica el caballo que avanza una posición. Gana la carrera el caballo que primero avance diez casillas.

Juego de bolsas[26]



El grupo se organiza en parejas y se preparan bolsas opacas con fichas rojas y verdes, como las que se muestran, de manera que a cada pareja le toque una.

Antes de comenzar la actividad se pregunta a las parejas cuántas fichas rojas y verdes creen que van a salir después de haber sacado 20 veces una ficha de la bolsa y, cada integrante completa la tabla con su estimación. Las fichas se revuelven y por turnos, cada estudiante extrae una y registra en la tabla de resultados “R” cuando salga una ficha roja, y una “V” cuando salga una verde. Cada integrante debe realizar 20 extracciones. Al terminar, comparan sus resultados.

Estimación	
Rojas	
Verdes	

Resultado de 20 extracciones	
Ficha	Número de veces
Roja	
Verde	

Después, cada pareja compara sus resultados con las que tuvieron la misma bolsa y discuten cuestiones como: ¿Qué color ha salido con más frecuencia?, ¿se puede saber qué color es más probable que salga? Comparan las estimaciones realizadas y ven quién se acercó más.

[26] Adaptado de *“¿Roja o verde?”* en Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. México.

Finalmente, se plantean al grupo las siguientes preguntas y se pide que expliquen su respuesta: *¿De cuál bolsa es más probable sacar una ficha roja?*, *¿de cuál bolsa es más probable sacar una ficha verde?*

Fuentes de consulta

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(2), 131-156. https://doi.org/10.12802/relime.18.2121

Batanero, B. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición Central. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada UNO, 2000, 25, 41-58. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf

Batanero, B. (2000). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires. Conferencia inaugural. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Batanero, C. y Diaz, C. (Eds.), (2011). Estadística con proyectos. Granada, Departamento de didáctica de la Matemática. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Granada, Departamento de didáctica de la Matemática. https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Batanero, C., (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Universidad de Granada España. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. Novedades educativas, 261, 78-84. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Novedades_Batanero.pdf

Chamorro, M. (2006). Didáctica De las Matemáticas para Primaria. PEARSON. Prentice Hall. México. México. https://archive.org/details/chamorro-m.-a.-didactica-de-las-matematicas/page/n3/mode/2up

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 4° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_04_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 5° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_05_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 6° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_06_mate.pdf

Ferrer, Maribel. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba. https://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/indice.htm

García, S. y López, O. (2008). La enseñanza de la Geometría. Colección Materiales para apoyar la práctica educativa. INEE. México. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

García, I.; García, J. A. (2004). La media aritmética. *Formación del Profesorado e investigación en Educación Matemática* (6), pp. 135-158. https://wp.ull.es/fpiem/wp-content/uploads/sites/158/2023/07/06_06-garcia-alonso-garcia-cruz.pdf

Godino, J. (Coord.), (2004). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

González, J. (2022). La medida y su didáctica. Propuesta para futuros docentes de educación primaria. Universidad de Valladolid, España. Facultad de Educación de Segovia. https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/53985/TFG-B.%201806.pdf?sequence=1

Gonzato, M. y Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. NNÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Volumen 77, julio de 20011, páginas 99-117. Universidad de Granada. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1209239/Gonzato2011TareasNumeros77.pdf

Google. (s.f.). [Mapa de Cancún, México en Google maps]. https://www.google.com/maps/@21.1337878,-86.8537465,11z?authuser=0&entry=ttu&g_ep=EgoyMDI0MDgyOC4wIKXMDSoASAFQAw%3D%3D

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., y Zanocco, P. (2014). REFIP Matemática: Números para futuros profesores de Educación Básica. Santiago: Ediciones SM. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/15621

OCDE, OIE-UNESCO, UNICEF LACRO (2016). La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica. Serie Aprendizajes y Oportunidades. https://panorama.oei.org.ar/_dev/wp-content/uploads/2017/09/UNICEF_UNESCO_OECD_Naturaleza_Aprendizaje_.pdf

Parra, C. y Saiz, I. (comps). (1994). Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Editorial Paidós SAICF. Argentina.

Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P. (1994). Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. Matemáticas y su enseñanza. Documento curricular P.T.F.D., en Matemática, Documento de trabajo No. 5 La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación. Argentina. http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.2, pp.809-824. http://funes.uniandes.edu.co/26411/1/Rodr%C3%ADguez2016Habilidades.pdf

Ruiz Vicente, M. A., (2020). Estado actual de la contaminación ambiental presente en la Mixteca Oaxaqueña. JOURNAL OF NEGATIVE & NO POSITIVE RESULTS, 5(5), 535-553. https://doi.org/10.19230/jonnpr.3257

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5. Pp. 13-66. https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libros para el maestro. Cuarto grado. México. Desafíos matemáticos. Libro para el maestro Grado 4° Generación 2014 .: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos :. (conaliteg.gob.mx)

Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libros para el maestro. Quinto grado. México. Desafíos matemáticos. Libro para el maestro Grado 5° Generación 2014 .: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos :. (conaliteg.gob.mx)

Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado. México.

Desafíos matemáticos. Libro para el maestro Grado 6° Generación 2014 .: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos :. (conaliteg.gob.mx)

Secretaría de Educación Pública. (2024). Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 3. Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente. México. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Desarrollo-de-habilidades-matematicas_Primaria_Fase-3.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2024). Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 4. Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente. México. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/08/Cuadernillo-Matematicas-Fase-4.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Cuarto grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-4to.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Quinto grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-5to.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Sexto grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-6to.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Tercer grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-3ero.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2007). Matemáticas. Quinto grado. México Matemáticas Grado 5° Generación 1993 .: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos :. (conaliteg.gob.mx)

Ursini, S. y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. Revista Colombiana de Educación, (73), 213-234. http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n73/0120-3916-rcde-73-00213.pdf

Vásquez, C., y Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31, 454-478. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22