
Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente

***Desarrollo de habilidades.
Matemáticas
Primera parte***

Primaria. Fase 5



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Martha Velda Hernández Moreno
Subsecretaria de Educación Básica

Xóchitl Leticia Moreno Fernández
Directora General de Desarrollo Curricular

**Material elaborado por la Dirección de Desarrollo Curricular
para la Educación Primaria**

Agosto de 2024



Índice

Presentación	1
Capítulo 1. Desarrollo de habilidades a partir del estudio de contenidos de matemáticas	3
• Encuentros y desencuentros con las matemáticas.....	4
• Dos escenarios, un camino	7
Capítulo 2. Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas	13
• Números	13
▪ Números naturales	13
▪ Fracciones	15
▪ Números decimales	16
• Multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas	29
• Proporcionalidad	40
Fuentes de consulta	50

Presentación

Estimada maestra, estimado maestro

Con la intención de enriquecer sus experiencias de apropiación de la nueva propuesta curricular, y contribuir en su formación profesional, la Secretaría de Educación Pública ha considerado la elaboración de **Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente** cuyo propósito es abordar temas fundamentales para el aprendizaje de niñas, niños y adolescentes que cursan la Educación Básica.

Bajo la premisa que la reflexión es la vía que permite mejorar como docente, los cuadernos de trabajo, **Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 5 Primera y Segunda parte**, pretenden propiciar un proceso de análisis, discusión e investigación acerca de cómo desarrollar habilidades del Campo formativo, a partir del estudio de contenidos matemáticos, y con ello, contar con mejores herramientas para promover ambientes de aprendizaje orientados al logro del Perfil de egreso.

Para lograr este objetivo, los contenidos del Cuaderno de trabajo **Primera parte** se organizan en dos capítulos. El primero, **Desarrollo de habilidades a partir del estudio de contenidos de matemáticas**, incluye textos retomados de investigaciones educativas sobre la didáctica de las matemáticas y actividades que motivan la reflexión en torno a su enseñanza y aprendizaje. Con ello se pretende valorar prácticas pedagógicas que propician el desarrollo de habilidades y la comprensión y uso de conceptos, métodos y técnicas de esta disciplina.

En el segundo capítulo, **Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas**, se han organizado tres apartados para abordar tres de los contenidos considerados en el Programa Sintético de la Fase 5:

1. Números
2. Multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas
3. Proporcionalidad

Este capítulo se continúa en el Cuaderno de trabajo **Segunda parte**, con el tratamiento de cinco contenidos:

1. Cuerpos y figuras geométricas
2. Ubicación espacial
3. Medición
4. Organización e interpretación de datos
5. Nociones de Probabilidad

A manera de introducción, en cada apartado se destaca la importancia del estudio del contenido y se incluyen conceptos, algunas ideas que prevalecen entre las y los

docentes sobre su enseñanza, recomendaciones y orientaciones sobre cómo abordarlo.

En “Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades” se enlistan algunas ideas que tienen niñas y niños sobre el tema, así como sugerencias didácticas.

La sección “Actividades para el aprendizaje” integra algunas actividades factibles de ponerse en práctica para favorecer el desarrollo de habilidades, a partir del trabajo con los contenidos de matemáticas del Campo formativo. En ese sentido, la intención no es agotar lo que podría realizarse fuera y dentro del aula para lograr ese cometido, sino proponer ejemplos que estimulen la creatividad y construcción de otras situaciones que generen aprendizajes significativos.

A lo largo del cuaderno se distinguen tres iconos:



Se propone lecturas de textos.



Se proponen ideas que motivan cuestionar la práctica docente.



Se propone la construcción de actividades didácticas que integren algunos elementos de las diferentes secciones del apartado.

Finalmente se incluyen las **Fuentes de consulta** que además de dar sustento a esta propuesta, se presume serán de utilidad para fortalecer los saberes docentes.

Le sugerimos disponer de un cuaderno para hacer anotaciones, resolver las actividades y registrar sus conclusiones. De ser posible, comparta sus experiencias e inquietudes con sus colegas para que se retroalimenten.

Capítulo 1. Desarrollo de habilidades a partir del estudio de contenidos de matemáticas

Desde el Campo formativo Saberes y Pensamiento Científico se plantea la intención de que el estudio de las ciencias naturales y de las matemáticas propicie en niñas, niños y adolescentes la capacidad de analizar distintas concepciones del mundo y tomar decisiones sobre la explicación más adecuada para comprender la realidad al momento de resolver o enfrentar una situación en particular.

En este marco, el desarrollo de habilidades para observar, cuestionar, clasificar, comparar, ordenar, experimentar, analizar, describir, relacionar, inducir, verificar, inferir, modelar, contar, formular algoritmos, registrar de manera más sistemática, se reconoce como un proceso que se transita paralelamente a la construcción de conocimientos y al fortalecimiento y fomento de valores y actitudes indispensables para participar en la resolución de problemas, generar y expresar opiniones propias y contribuir en la transformación sustentable de la comunidad, es decir, poner en práctica el pensamiento crítico.

De manera que en este capítulo se proponen textos y actividades que motivan la reflexión en torno a sus experiencias docentes relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. La intención es identificar aquellas prácticas que propician el desarrollo de habilidades y la comprensión y uso de conceptos, métodos y técnicas de esta disciplina, contar con elementos para generar ambientes favorables para un aprendizaje significativo, así como invitarle a seguir investigando para enriquecer sus saberes respecto a cómo niñas y niños aprenden matemáticas.

Encuentros y desencuentros con las matemáticas

El siguiente fragmento es parte de la introducción del libro “Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio”, de Cecilia Parra e Irma Saiz.



Los alumnos aprenden matemáticas a partir de lo que tienen oportunidad de hacer en relación con el conocimiento. Aprenden matemáticas trabajando frente a las situaciones que el maestro ha seleccionado y les plantea. Aprenden actuando. Aprenden pensando sobre lo que hacen y sobre lo que imaginan.

Se busca que aprendan por sí mismos, pero eso no debe confundirse con que aprenden solos. Justamente porque no aprenden solos es que vienen a la escuela.

En la escuela aprenden porque los maestros conciben y llevan adelante un proyecto intencional con el fin de que ellos aprendan muchas cosas en no mucho tiempo.

Promover las prácticas de los alumnos en torno al conocimiento no es tarea fácil. Los alumnos tienen ritmos distintos. Organizar la actividad de los alumnos, sus intercambios, de modo que se aseguren aprendizajes en cada uno de ellos es un enorme desafío para los maestros.

Muchas veces ese desafío resulta muy cuesta arriba y entonces se opta por maneras de enseñar que no son desafíos para los niños: se presentan los temas, se enseñan unas maneras fijas de proceder, se ejercita, y los resultados son los acostumbrados, a unos pocos no les cuesta aprender esos contenidos, a la mayoría le cuesta bastante. Y continúa la historia: mucha gente no quiere saber nada con la matemática cuando sale de la escuela.

Ese desencuentro con la matemática que la mayoría de los adultos manifiesta probablemente empezó a temprana edad y en la escuela. Aun con las cuestiones que parecen más simples, como el contacto con los primeros números, la enseñanza puede plantearse de modos que favorecen que cada uno se apropie, se adueñe de los

¹ Parra, C. y Saiz I. (2008). Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio. SEP / Homo Sapiens Ediciones. México.

conocimientos, o de modos enajenantes, en los que el conocimiento es algo de otros, sin sentido, y que no se sabe utilizar.

La preocupación respecto de que nuestras enseñanzas les permitan a los alumnos construir sentidos no es patrimonio de la educación matemática. Al contrario, inscribe a la enseñanza de la matemática en la amplia y antigua búsqueda de los educadores: ayudar a los alumnos a dar sentido al mundo en que viven, aprender a interactuar con él y a resolver, junto a otros, los problemas que plantea.

Reflexione sobre los siguientes cuestionamientos:

- ¿A qué se refieren las autoras al afirmar que “los niños aprenden matemáticas actuando, pensando sobre lo que hacen y lo que imaginan”? ¿Considera usted que estas acciones involucran el desarrollo de habilidades? ¿Cuáles?
- Parra y Saiz mencionan que organizar una actividad en ocasiones resulta un desafío mayor para la y el docente, entonces optan por maneras de enseñar que dan como resultado que el estudio de las matemáticas resulte desagradable para las y los estudiantes. De acuerdo con su experiencia, ¿qué tipo de enseñanza causa tal efecto?
- ¿Qué otras ideas del texto de Parra y Saiz destacaría usted?

En la introducción del mismo libro las autoras también incluyen tres valoraciones a las que denominan “miradas” sobre los conocimientos, sobre los aprendizajes y sobre la enseñanza:



Una mirada sobre los conocimientos

Los conocimientos matemáticos, (...), que los alumnos tienen que aprender en el jardín de Infantes y en los primeros años de la Escuela Primaria, están tan incorporados a la cotidianidad que resulta difícil para los adultos no especializados tomar conciencia de la complejidad y multiplicidad de aspectos involucrados. Constituyen instrumentos culturales construidos en tiempos tan pretéritos que con frecuencia se olvida que fueron construidos para resolver problemas, que supusieron la elaboración de procedimientos y técnicas de obtención y tratamiento de la información, así como de medios de representación y de comunicación. Todos estos aspectos son constitutivos del conocimiento, como los medios de control de su utilización y los fundamentos para su justificación.



instrumentos culturales contruidos en tiempos tan pretéritos que con frecuencia se olvida que fueron contruidos para resolver problemas, que supusieron la elaboración de procedimientos y técnicas de obtención y tratamiento de la información, así como de medios de representación y de comunicación. Todos estos aspectos son constitutivos del conocimiento, como los medios de control de su utilización y los fundamentos para su justificación.

Apropiarse de estos conocimientos supone, para los alumnos, una verdadera reconstrucción que, sin poder ser entendida como un recorrido por sucesivos momentos históricos, no puede saltarse ninguno de los grandes hitos que jalnearon su evolución.

[...]

Debemos al maestro Guy Brousseau² el haber elaborado una teoría que modeliza las condiciones bajo las cuales los seres humanos producen y aprenden los conocimientos que reconocemos como matemáticos.

[...]

Con apoyo en esta teoría se ha formulado un punto de partida fundamental para la enseñanza: **El tipo de prácticas que un alumno despliegue a propósito de un concepto matemático constituirá el sentido de ese conocimiento para ese alumno.**

Una mirada sobre los aprendizajes

Como hemos dicho, partimos de la convicción de que los alumnos aprenden matemáticas a raíz de lo que tienen oportunidad de hacer con relación al conocimiento. **Esta actividad matemática desarrollada por los alumnos no consiste habitualmente en un proceso lineal. Por el contrario, se compone de búsquedas, intentos, errores, hallazgos, dudas, certezas, revisiones, formulaciones, nuevas búsquedas, y es precisamente esa sinuosidad la que constituye su riqueza.**

[...]

² Guy Brousseau comenzó su carrera profesional como maestro de escuela primaria. Se formó posteriormente como matemático y obtuvo el título de doctor en Ciencias de la Universidad de Burdeos. Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de la Matemática es la Teoría de Situaciones Didácticas. Tomado de Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.

Los niños son muy capaces de ponerse a trabajar cuando se los convoca a hacer algo a lo que pueden otorgar sentido. Muestran alegría cuando algo «funciona», cuando logran resolver, cuando entienden algo y pueden dominar ese «pedacito del mundo» que el problema les propone. **Crecen (incluso a sus propios ojos) cuando están seguros de algo que afirman e incluso cuando pueden identificar con claridad en qué se han equivocado. Son capaces de realizar genuina actividad matemática.**

Una mirada sobre la enseñanza

Basados en la convicción de que la actividad de resolución de problemas constituye no sólo el criterio o el móvil del aprendizaje, sino en principio su lugar y su medio³, **se impulsa desde hace muchos años plantear a los alumnos situaciones que van a enfrentar con los recursos de los que disponen. A la vez, se plantea que la situación es verdaderamente un problema si los alumnos encuentran allí una cierta «resistencia», un desafío frente al cual resulta necesario revisar aquello con lo que cuenta, producir nuevas respuestas, poner en juego otros conocimientos (precisamente el conocimiento al que se apunta).**

La difusión de este enfoque ha provocado, en muchos casos, una mayor presencia de problemas en las aulas y un descrédito de las «cuentas peladas».

Sin embargo, este mensaje, tan largamente difundido, resulta víctima de versiones simplificadoras, ya que no hay «llaves mágicas» y no basta un problema, por muy bueno que sea, para que se produzcan los aprendizajes buscados.

En los recuadros se han resaltado ideas que dan cuenta de lo que implica el aprendizaje y la enseñanza de conocimientos matemáticos.

- ¿Qué relación encuentra usted entre esas ideas?
- ¿Cómo las relaciona con su práctica docente?
- ¿Qué aspectos tomaría en cuenta al realizar su planeación didáctica?

Dos escenarios, un camino

En el apartado anterior se inició la reflexión acerca de cómo niñas y niños aprenden matemáticas, en el entendido de que ese proceso implica el desarrollo de habilidades,

³ Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas, en: Parra, C. y Saiz, I. (1994)

a la par de la construcción de conceptos, métodos y técnicas, así como la práctica de valores y actitudes.

La intención ahora es enfatizar dos cuestiones fundamentales: la forma como las y los estudiantes interactúan durante la clase de matemáticas y la situación problemática que puede propiciar un aprendizaje.

Para ello, se describe lo ocurrido en dos aulas diferentes donde se estudia un contenido matemático⁴:

Aula 1

- El profesor revisa el concepto de suma con sus estudiantes
- El profesor explica cómo resolver una suma; sus estudiantes practican con algunos ejemplos
- El profesor explica cómo comprobar si la suma se resolvió correctamente; sus estudiantes practican con algunos ejemplos
- Las y los estudiantes trabajan individualmente sobre un problema que se resuelve con una suma

Aula 2

- El profesor presenta un problema que podría resolverse con una suma
- Sus estudiantes tratan de resolver el problema individualmente o en equipos; el profesor escucha y cuestiona sus argumentos y acuerdos
- Los equipos presentan y discuten colectivamente las soluciones del problema junto con explicaciones del profesor, con miras a una solución general
- Las y los estudiantes practican con algunos problemas

Se puede apreciar que la manera en que las y los estudiantes se involucran en la clase es diferente en las dos aulas, en consecuencia, el nivel de logro de aprendizaje también evidenciará diferencias.

- ¿Cómo es la participación de las y los estudiantes del Aula 1?, ¿cuál es la del docente?

⁴ Los escenarios descritos son una adaptación a los que Keith Jones y Julie-Ann Edwards incluyen en su artículo "Planning for mathematics learning" (Planificación del aprendizaje matemático), al referirse a dos formas típicas en que se desarrollan lecciones de matemáticas. En S. Johnstone-Wilder, C. Lee, & D. Pimm (Eds.) (2017), *Learning to teach mathematics in the secondary school: A companion to school experience* (chapter 5). Abingdon: Routledge. 4th edition (pp. 70-91). Johnston-Wilder S., Lee C., Primm D.

- ¿Cómo es la participación de las y los estudiantes del Aula 2?, ¿cuál es la del docente?
- ¿Con cuál de estas prácticas se identifica usted? ¿Por qué?
- ¿Considera que en ambas aulas las y los estudiantes desarrollan habilidades?, ¿cuáles se desarrollan en el Aula 1?, ¿cuáles en el Aula 2?
- ¿Cuáles de las habilidades que identificó están presentes en los Programas sintéticos de la Fase 5?

Se ha considerado la resolución de problemas como el medio para aprender matemáticas en la escuela, a la vez de ser el fin para el cual se estudian. Sin embargo, a pesar de que en las aulas las y los estudiantes resuelven problemas cotidianamente, no logran hacerlo con efectividad y de manera autónoma.

Una condición para tomar en cuenta es que en muchas aulas los problemas se proponen al finalizar el tratamiento de un tema, como ocurre en el Aula 1, lo que provoca que los conceptos, métodos o técnicas enseñadas sean ajenas a las y los estudiantes, porque resultan abstractas, alejadas de su comprensión y su uso carece de sentido. Si bien logran cierto dominio algorítmico o memorizan un concepto, no son capaces de aplicarlo al resolver una situación problemática, un reto. Por ende, el desarrollo de habilidades y la construcción de conocimiento son escasos o no ocurren.

En el Aula 2 con el problema se inició el tratamiento del tema, y para resolverlo las y los estudiantes comentan, proponen, argumentan, ponen en práctica sus saberes y a prueba sus propuestas, las mejoran o las cambian, de modo que los conceptos, métodos o técnicas involucradas les son cercanas, porque se involucraron en su construcción.

El Diagrama 1 representa la forma como se desarrolla la clase del Aula 2:

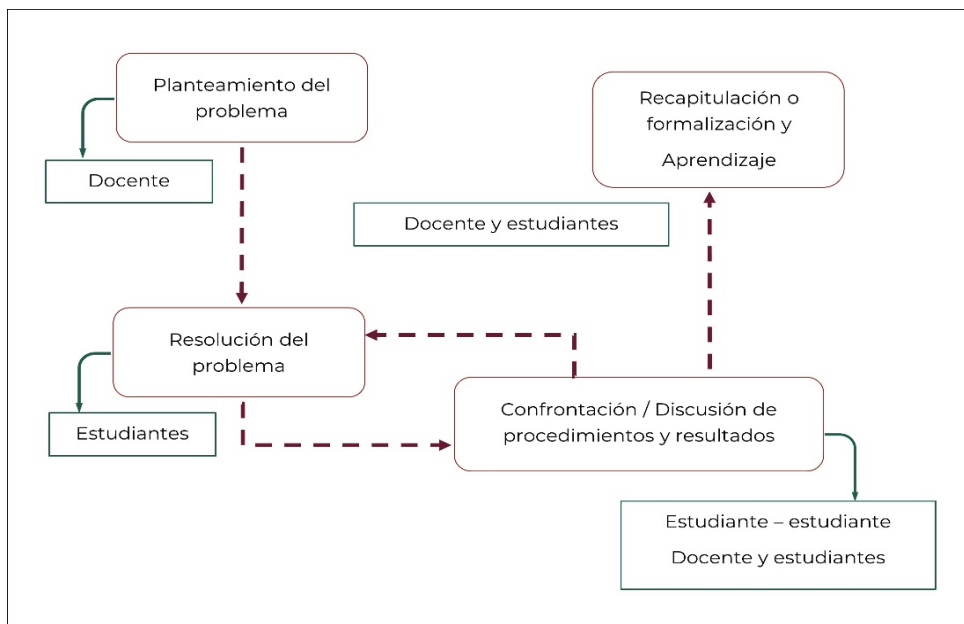


Diagrama 1. Creación equipo académico DGDC. Primaria

Como se puede observar, en una clase como esta, las y los estudiantes se responsabilizan de la actividad para tratar de dar respuesta al problema, lo que implica dialogar, argumentar, tomar acuerdos sobre cómo “articular” lo que saben para llegar a una solución, poner a prueba sus estrategias y procedimientos y, junto con su docente, valoran si las decisiones que tomaron fueron convenientes y correctas.

En esta clase, el docente propone el problema con intención clara de lo que sus estudiantes requieren poner en juego para lograr cierto aprendizaje, los acompaña en ese proceso escuchándolos, cuestionando sus ideas y argumentos con el propósito de que reflexionen sobre lo que proponen y, junto con ellas y ellos valida los resultados. Una práctica docente como la descrita conlleva dos intenciones:

La primera es modificar lo que comúnmente ocurre en las aulas: las y los estudiantes tienden a preguntar a la o el docente si su razonamiento o resultado es correcto, porque creen que es quien solamente sabe y valida todas las respuestas. La segunda intención es identificar cuáles son los procedimientos más convenientes para discutir en plenaria y que a partir de la argumentación se validen o rechacen, para que posteriormente, en conjunto, docente y estudiantes, lleguen a una conclusión cercana al procedimiento formal.

Para iniciar la discusión se puede invitar a que espontáneamente cualquier equipo explique al grupo cómo llegó a la respuesta, o invitar directamente a aquellos equipos que anteriormente se identificaron con procedimientos interesantes, por ejemplo: a) los que aplicaron un procedimiento diferente, raro, distinto del resto y obtuvieron la respuesta correcta; b) los que aplicaron el procedimiento que se esperaba y obtuvieron la respuesta correcta; c) los que aplicaron el procedimiento que se esperaba pero no lograron la respuesta correcta. No se trata de exponer todos los procedimientos y resultados, sino que, a partir de la discusión de algunos, las y los estudiantes puedan por sí mismos corregir o enriquecer razonamientos y procedimientos propios.

La recapitulación también es interpretada como la formalización de los aprendizajes y el cierre de la sesión, y se realiza con base en las conclusiones a las que lleguen niñas y niños.

La confrontación de procedimientos y resultados, que ocurre durante la interacción entre pares y la puesta en común son momentos privilegiados para ayudar a las y los estudiantes a poner en evidencia las relaciones que existen entre diferentes procedimientos, por ejemplo, las semejanzas o diferencias.

Para tener más referentes sobre esos dos momentos se presenta parte del texto “Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro” desarrollado por Cecilia Parra, Irma Saiz y Patricia Sadovsky⁵.



Vamos a referirnos a dos momentos importantes en las clases de matemáticas: la integración entre pares y la puesta en común, advirtiendo que:

- si se desea que los alumnos entren en un funcionamiento como el sugerido, cualquiera sea el nivel del que se trate, el docente debe prever un conjunto de actividades destinadas, justamente, a instalar en su clase nuevas “reglas del juego”. Fundamentalmente dirigidas a que los alumnos aprendan a realizar una porción mayor de trabajo independiente, a que se escuchen entre ellos, que otorguen valor a la palabra de un compañero y no sólo a la del maestro, a que aprendan a registrar su trabajo y comunicarlo, a revisar los errores y corregirlos, a asumir responsabilidades en el proceso y su evaluación. Estos objetivos pueden ser explícitos y se puede comprometer a los alumnos en reflexiones sobre el nivel de logro que respecto de los mismos van teniendo.
- aunque en un primer momento los aspectos de funcionamiento pueden ser prioritarios, las actividades no pueden ser planteadas en el “vacío” sino que deben plantearse en torno a contenidos específicos. Desde el inicio es necesario analizar qué tipo de actividad para qué tipo de contenido, aunque sin duda, tanto la experiencia que el docente mismo vaya teniendo en conducir de otra manera sus clases, como la que vayan teniendo los alumnos, van a favorecer una articulación más afinada entre ambos aspectos. Debemos reconocer que conducir un debate en la clase es de alto desafío para el docente y tiene muchos requerimientos de formación y de conocimientos. El docente necesita conocer muy bien el contenido de referencia, tener una representación de las posibles concepciones de los alumnos y saber también a través de qué medios va a hacer evolucionar los conocimientos producidos en dirección al saber al que se apunta.

- Desde su experiencia, ¿qué necesitaría hacer para propiciar un ambiente como el descrito en el texto?

Para finalizar este capítulo se propone reflexionar sobre la siguiente pregunta:

- Para usted, ¿qué es un problema?

⁵ Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P. (1994). Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. Matemáticas y su enseñanza. Documento curricular P.T.F.D. En Matemática, Documento de trabajo No. 5 La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación. Argentina.

- Registre su respuesta y posteriormente contrástela con la propuesta que hacen Parra y Saiz⁶:

Un problema (en la escuela) es la situación en la que hay algo que no se sabe, pero se puede averiguar. No se dispone de la solución, pero se cuenta con algunas herramientas para empezar a trabajar. Tiene que permitir a los alumnos imaginar y emprender algunas acciones para resolverlo.

⁶ Parra, C. y Saiz I. (2008).

Capítulo 2. Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas

Números

En esta Fase se pretende que niñas, niños y adolescentes sigan avanzando, por una parte, en el desarrollo de saberes respecto al conocimiento, representación y uso de los números naturales y por otra, continúen explorando las fracciones y los números decimales, números cuyo estudio iniciaron en la Fase 4.

Conocer las características y propiedades de las fracciones y los números decimales amplía la concepción que las y los estudiantes saben sobre los números y les facilita comprender muchas situaciones que cotidianamente enfrentan, así como otros conceptos matemáticos. A la par, desarrollan de manera más sistemática habilidades para observar, cuestionar, clasificar, medir, comparar, ordenar, analizar, relacionar, verificar, inferir, modelar, contar, formular algoritmos, registrar, entre otras.

En ese sentido, conviene propiciar que niñas, niños y adolescentes participen en tareas que requieran registrar, calcular, medir, contar objetos, ordenarlos o clasificarlos, con la intención de que valoren a los números como un elemento imprescindible para expresar los resultados de sus experiencias. La idea es que representen, interpreten y comuniquen hechos y situaciones empleando el lenguaje matemático.

Números naturales

El dominio de los números es la base para el aprendizaje de otros contenidos. Por ello el interés es promover la construcción del **sentido numérico** (conocerlos, representarlos de diferentes formas, establecer diferentes relaciones entre ellos, usarlos para contar y resolver diferentes situaciones a través del cálculo).

En esta Fase, culmina la lectura, escritura y comprensión de los números naturales; por lo que se retoma lo trabajado en la Fase 4 y se continúa el análisis de patrones o regularidades en la sucesión numérica, de manera que se profundiza en el conocimiento del **sistema de numeración decimal**.

El rango numérico considerado para quinto grado es de hasta nueve cifras, y en sexto grado, se amplía a más de nueve cifras. En ambos casos, para establecer el valor posicional de las cifras que componen un número es fundamental que niñas, niños y adolescentes consideren que un grupo de 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, etcétera, es una unidad. En este sentido, será necesario motivar que tengan presente que, en la numeración decimal, 10 unidades de un orden forman una unidad de un orden inmediato superior, que observen que los números comprendidos del 10 000 al 99 999 se escriben con cinco cifras y los de 100 000 al 999 999 con seis cifras, que los números que tienen más de seis cifras representan millones, y que en estos también hay unidades, decenas, centenas y millares:

UNIDADES DE BILLÓN (UB)			MILLARES DE MILLON (MMLL)			UNIDADES DE MILLON (UMLL)			MILLARES (M)			UNIDADES (U)		
CB	DB	UB	CMLL	DMLL	UMLL	CMLL	DMLL	UMLL	CM	DM	UM	C	D	U
10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Potencias de 10	Magnitud
$10^0 = 1$	Uno
$10^1 = 10$	Diez
$10^2 = 100$	Cien
$10^3 = 1\ 000$	Mil
$10^4 = 10\ 000$	Diez mil
$10^5 = 100\ 000$	Cien mil
$10^6 = 1\ 000\ 000$	Un millón
$10^7 = 10\ 000\ 000$	Diez millones
$10^8 = 100\ 000\ 000$	Cien millones
$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$	Mil millones
$10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$	Diez mil millones
$10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$	Cien mil millones
$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$	Un billón
$10^{13} = 10\ 000\ 000\ 000\ 000$	Diez billones
$10^{14} = 100\ 000\ 000\ 000\ 000$	Cien billones



Equivalencias entre las diferentes unidades

1 U	1 unidad			
1 D	10 unidades			
1 C	100 unidades	10 decenas		
1 UM	1 000 unidades	100 decenas	10 centenas	
1 DM	10 000 unidades	1 000 decenas	100 centenas	10 unidades de millar
1 CM	100 000 unidades	10 000 decenas	1 000 centenas	100 unidades de millar
1 UMLL	1 000 000 unidades	100 000 decenas	10 000 centenas	1 000 unidades de millar
1 DMLL	10 000 000 unidades	1 000 000 decenas	100 000 centenas	10 000 unidades de millar
1 CMLL	100 000 000 unidades	10 000 000 decenas	1 000 000 centenas	100 000 unidades de millar

El valor relativo de un número está dado por el lugar que ocupa cada cifra y el valor absoluto es el valor que representa una cifra por su símbolo. Por ejemplo, en 5 693, el valor absoluto de 6 es 6 y su valor relativo es 600.

Es importante considerar que decir oralmente la sucesión numérica supone iniciarla o continuarla de manera ascendente o descendente a partir de cualquier número, ya sea de uno en uno o en intervalos de 10 en 10, de 20 en 20, de 50 en 50, de 100 en 100, de 1 000 en 1 000, etcétera.

Fraciones

Desde grados anteriores las y los estudiantes han identificado y generado fracciones equivalentes para expresar de diversas formas la misma cantidad. Ahora se trata de que establezcan y utilicen la propiedad que caracteriza a las fracciones equivalentes y que permite generarlas: multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número natural.

Comprender las fracciones conlleva pensar en nuevas relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema decimal: en situaciones de medida, con el significado de parte de un todo o de un conjunto de objetos, en situaciones de reparto, con el significado de cociente, índice comparativo (razón) o como operador.

El estudio de las fracciones representa un gran reto para las y los estudiantes porque implica un cambio respecto a los conocimientos que tienen sobre la representación y funcionamiento de los números naturales. Lo que da lugar a algunas ideas erróneas como:

- al dividir o partir un “todo”, “entero” o unidad en cinco partes, se obtienen quintos, sin considerar el tamaño de las partes;

- ver cualquier fracción como dos números naturales, y no como un número compuesto por dos elementos;
- las fracciones mayores que la unidad no son fracciones ($\frac{15}{4}, \frac{12}{3}, 5\frac{1}{4}$);
- que entre mayor sea el denominador, la fracción es mayor, por ejemplo, que $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{2}{5}$ porque el denominador 3 es menor que el 5;
- comparar dos fracciones que no se originan del mismo “todo”, “entero” o unidad, por ejemplo, la mitad de un equipo de 12 integrantes respecto a la mitad de un equipo de 6 integrantes;
- al realizar operaciones, por ejemplo, $\frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{6}{9}$, suman los numeradores y los denominadores entre sí;
- al generar fracciones equivalentes, suman el mismo número tanto al numerador como al denominador $\frac{1}{2} = \frac{1+4}{2+4} = \frac{5}{6}$.

Números decimales

Los números decimales permiten resolver situaciones que no es posible solucionar con el uso de números naturales, porque requieren de la representación de una fracción decimal. Comprenderlos implica conocer su notación, sus propiedades y funciones, así como interpretar su valor de acuerdo con la unidad de referencia.

Los números decimales tienen aplicaciones en diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, para expresar y calcular costos, medidas, porcentajes, hacer conversiones entre monedas, etcétera.

Comúnmente se cree que todos los números que tienen un punto son números decimales, sin embargo, no es así. **Los números decimales representan fracciones decimales** de la unidad que se ha considerado como referencia. Por ejemplo, 0.5 metros, la unidad de referencia es el metro y expresa la medida de cinco décimas partes de un metro (que equivalen a 50 cm) por tanto, la cantidad 0.5 metros significa 50 centímetros.

Las fracciones decimales son las que se expresan con un denominador que es potencia de 10 ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, etcétera), por ejemplo $\frac{8}{10}$ y $\frac{5}{1000}$. También $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$ son fracciones decimales, porque se pueden generar fracciones equivalentes a un medio y a cuatro quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de 10: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$.

Las fracciones decimales tienen la particularidad de que también se pueden representar utilizando escrituras que llevan punto decimal, esto da lugar a **expresiones decimales finitas** y que, en la escuela, simplemente se le llaman

decimales. Por ejemplo, a las fracciones $\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{1000}$ les corresponden, respectivamente, los números decimales 0.8 y 0.004.

Fracciones como $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, no son decimales porque se expresan con un denominador diferente a una potencia de 10, no son equivalentes a fracciones con denominadores potencia de 10, y tampoco se pueden representar mediante una expresión decimal finita. Estas fracciones dan lugar a expresiones decimales periódicas infinitas: $\frac{1}{3} = 0.33\dots$

Los números decimales y las expresiones decimales periódicas forman el conjunto de los números racionales, es decir, los números que pueden escribirse como fracciones $(\frac{a}{b})$, en los que el numerador es entero y el denominador es diferente a cero. En ese sentido, con el estudio de los números naturales, en la Educación Primaria se inicia el estudio de números racionales.

Comprender los números decimales también representa un gran reto para las y los estudiantes porque implica un cambio respecto a los conocimientos que tienen sobre la representación y funcionamiento de los números naturales. Lo que da lugar a algunas ideas erróneas como:

- creer que un centésimo es mayor que un décimo, y es menor que un milésimo;
- los números decimales tienen un antecesor y un sucesor;
- entre dos números decimales, por ejemplo, entre 1.67 y 1.68, no existe alguno;
- interpretar su significado sin tomar en cuenta la unidad de referencia.



Además de $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$, ¿qué otras fracciones decimales conoce?

Registre 10 de ellas con sus respectivas fracciones equivalentes con denominadores potencia de 10.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con los números

Números naturales

- Identificar regularidades en la sucesión numérica favorece que niñas y niños cuenten con herramientas para comparar, interpretar, producir números y anticipar resultados de algunas operaciones.
- Conviene proponer actividades como: realizar sucesiones de 10 en 10, 100 en 100 o 1 000 en 1 000, oralmente y por escrito de manera ascendente y descendente a partir de un número dado, sin perder de vista que hacerlo de forma descendente representa mayor complejidad para las y los estudiantes; representar un mismo número de varias formas: a partir de agrupamientos de 1 000, 10 000, 100 000, etcétera, o de expresiones aditivas:

$$215\ 793 = 200\ 000 + 10\ 000 + 5\ 000 + 700 + 90 + 3$$

$$215\ 793 = 215\ 000 + 590 + 203$$

$$215\ 793 = 618\ 897 - 511\ 000 + 107\ 896$$

También, leer números escritos (6 980 749) y escribirlos con cifras a partir de su nombre (seis millones novecientos ochenta mil, setecientos cuarenta y nueve); escribir o decir el número que se encuentra antes, después o entre dos números dados; completar o continuar sucesiones numéricas ascendentes y descendentes.

- Identificar algunas diferencias entre la numeración oral y la escrita con números, ya que las reglas de la numeración oral no coinciden generalmente con las de la numeración escrita, y probablemente algunas y algunos estudiantes todavía hagan una correspondencia literal entre palabras y números, por ejemplo, podrían escribir “doscientos doce mil ochenta y nueve”, como 212 000 89, en lugar de 212 089.
- Un error común al escribir números con letra es omitir la “s” al escribir los “cientos”: doscientos, trescientos, seiscientos.
- Una particularidad de los números naturales es que las cifras suelen separarse de tres en tres mediante un espacio o una coma, por ejemplo, 2 815 343 o 2,815,343. Esto se hace con la finalidad de facilitar la lectura, de modo que a cada grupo de tres cifras se le agrega la palabra que indica el orden: dos **millones**, ochocientos quince **mil** trescientos cuarenta y tres.

Fracciones

- Para obtener una fracción se deben cumplir dos principios: todas las partes resultantes deben ser iguales (**equitatividad**) y, del “todo”, “entero” o unidad dividida, debe quedar nada (**exhaustividad**).
- Si es necesario, materiales concretos y representaciones gráficas son recursos que las y los estudiantes pueden seguir utilizando para comprar fracciones y, visualizar y comprobar equivalencias entre ellas.
- Conocer y usar diferentes representaciones (gráficas, expresiones aditivas, ubicación en recta numérica) de un número permite a las y los estudiantes generar fracciones equivalentes, por lo que es necesario que reconozcan fracciones unitarias ($\frac{1}{4}$), propias ($\frac{5}{7}$) e impropias ($\frac{8}{3}$) y que expresen fracciones impropias como números mixtos y viceversa.
- En la comparación de fracciones se pueden identificar tres casos:
 1. Las dos fracciones tienen el mismo denominador, entonces, es mayor la que tiene mayor numerador.
 2. Las dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces, es mayor la que tiene menor denominador.
 3. Las dos fracciones tienen distinto numerador y denominador, en este caso, la fracción mayor se identifica a partir de varias estrategias, una de ellas es generar fracciones equivalentes.
- Las y los estudiantes pueden aplicar varios criterios al comparar fracciones:
 - a) Representarlas gráficamente o sobre la recta numérica.
 - b) Identificar las fracciones que representan una unidad, más que una unidad y menos que una unidad. Por ejemplo, si se ordenan las fracciones $\frac{5}{5}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{6}{4}$, iniciando por la mayor, $\frac{6}{4}$ es más que uno, $\frac{5}{5}$ representan uno y $\frac{2}{8}$ es menos que uno.
 - c) Representar las fracciones mayores a la unidad como números mixtos:
$$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}, \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ o viceversa.}$$
 - d) Convertir las fracciones a su escritura decimal: $\frac{1}{5} = 0.2$; $\frac{1}{4} = 0.25$
 - e) Calcular fracciones equivalentes.

- Se obtiene una fracción equivalente de otra, al multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15} \text{ entonces } \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{18}{24} \quad \frac{18 \div 3}{24 \div 3} = \frac{6}{8} \text{ entonces } \frac{18}{24} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{6}{8} \quad \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4} \text{ entonces } \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \text{ por lo tanto, } \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

- Para comparar fracciones se pueden seguir dos procedimientos:

De $\frac{5}{6}$ y $\frac{13}{15}$ ¿cuál fracción es mayor?

- a) Multiplicar el numerador y denominador de la primera fracción, por el denominador de la segunda. Después, multiplicar el numerador y denominador de la segunda fracción por el denominador de la primera:

$$\frac{5}{6} \quad \frac{13}{15} \rightarrow \frac{5 \times 15}{6 \times 15} = \frac{75}{90}; \frac{13 \times 6}{15 \times 6} = \frac{78}{90}; \frac{75}{90} \text{ es menor que } \frac{78}{90}, \text{ por lo tanto, } \frac{13}{15} > \frac{5}{6}$$

- b) Identificar un múltiplo que sea común a los denominadores, de tal forma que se obtengan fracciones equivalentes con el mismo denominador:

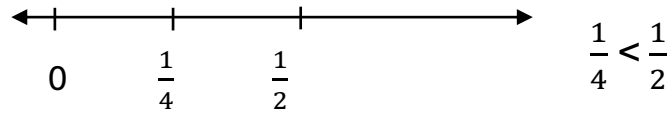
El mínimo común múltiplo de 6 y 15 es el 30, entonces, las fracciones equivalentes tendrán como denominador el 30, esto implica que, el numerador y denominador de $\frac{5}{6}$ se multiplique por 5, y el numerador y denominador de $\frac{13}{15}$ se multiplique por 2:

$$\frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30} \quad \frac{13 \times 2}{15 \times 2} = \frac{26}{30} \text{ y como } \frac{25}{30} \text{ es menor que } \frac{26}{30}, \text{ entonces } \frac{13}{15} > \frac{5}{6}$$

- Una forma de comprobar que dos fracciones son equivalentes es multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera; si los dos productos son iguales, las fracciones son equivalentes:

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{6}{9} \text{ son equivalentes porque } 2 \times 9 = 6 \times 3$$

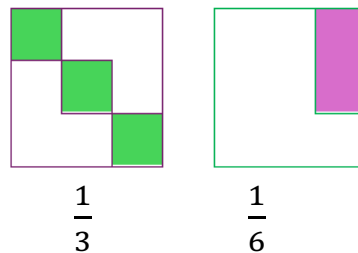
- En la recta numérica, es mayor la fracción que queda a la derecha de otra:



- Si bien el estudio del mínimo común múltiplo no es tema de estudio de la Educación Primaria, las y los alumnos pueden identificarlo con apoyo del Cuadro de multiplicaciones (Tabla Pitagórica).
- Trabajar las fracciones, en la medida de lo posible, en contextos reales que involucren comparaciones, estimaciones, ordenamientos o diferentes representaciones: medición de magnitudes o interpretación de información numérica relacionada con producción de alimentos, índices de contaminación, tasa del consumo de sustancias adictivas, entre otras.
- Plantear situaciones que impliquen identificar fracciones equivalentes con diferentes modelos o estrategias como representaciones gráficas o recorte de figuras; por ejemplo:

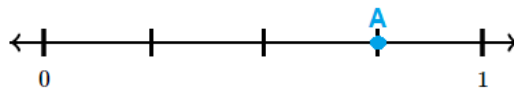
A partir de los modelos, identificar cuántos sextos equivalen a dos tercios.

$$\frac{2}{3} = \frac{\boxed{}}{6}$$



- Propiciar que las y los estudiantes formen pequeños repertorios de fracciones equivalentes; vincular la generación de fracciones equivalentes con la resolución de sumas o restas, ya que resulta más fácil operar fracciones con el mismo denominador.
- Solicitar que se representen fracciones equivalentes en la recta numérica:

Escribir dos fracciones que se ubiquen en el punto A.

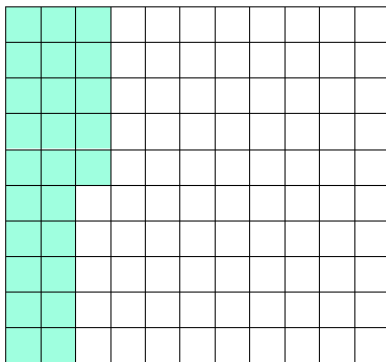


- Plantear problemas como: ¿Qué tira será más larga, la que mide $\frac{5}{2}$ metros o la que mide $\frac{7}{4}$ metros? e invitar a las y los estudiantes que propongan formas para solucionarlo. Posteriormente, plantearles preguntas que les lleve a reflexionar sobre la ventaja de generar fracciones equivalentes a las dadas, con igual denominador.

- Analizar lo que ocurre al multiplicar el numerador de una fracción por un número natural (se aumenta el valor de la fracción); al multiplicar el denominador de una fracción por un número natural (se reduce el valor de la fracción), y cuando se multiplican tanto al numerador como al denominador de una fracción por el mismo número natural (se obtiene una fracción equivalente).
- Plantear situaciones que impliquen comparar fracciones:
 - a) Con igual denominador: $\frac{2}{8} < \frac{3}{8}$
 - b) Con igual numerador: $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$
 - c) Con diferente numerador y denominador: $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$

Números decimales

- En un número decimal todas las cifras conforman un solo número, es decir, no se trata de dos números separados por un punto. Las cifras escritas hacia la derecha del punto representan un valor menor que uno y cada lugar implica un valor relativo diez veces menor al anterior.
- Un mismo número se puede representar de distintas maneras:



$$0.25$$

$$\frac{20}{100} + \frac{5}{100}$$

$$\frac{25}{100}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$0.20 + 0.05$$

- A diferencia de los números naturales, en los números decimales como en las fracciones no hay un número antecesor o sucesor, porque entre dos números decimales siempre es posible incorporar otro, esto se conoce como la **propiedad de densidad de los números decimales** (válida para todos los racionales). Por ejemplo, entre 5.12 y 5.13, se pueden identificar 5.124, 5.126, 5.122; entre 5.12 y 5.122, pueden estar el 5.1203, 5.12008, 5.12025, 5.121.
- En los números decimales el número de cifras no es un recurso útil para comparar o definir el orden, por ejemplo, 16.7 es mayor que 16.587.
- El valor de un número decimal no se altera si se añaden ceros a la derecha de la última cifra, por ejemplo, $1.5 = 1.50 = 1.500 = 1.5000, \dots$

- En muchas ocasiones las y los estudiantes memorizan el nombre de cada lugar que ocupan las cifras que componen un número, sin comprender el valor que representa, por eso es común que afirmen particularmente que, un milésimo es mayor que un centésimo o que un centésimo es mayor que un décimo. Estas afirmaciones son muestra de que no se ha entendido que los valores representados hacia la derecha del punto decimal son fracciones de la unidad.
- Para comparar números decimales, es conveniente trabajar con la notación fraccionaria y la decimal. Por ejemplo, si los números 0.19 y 0.2 se expresan con las fracciones $\frac{19}{100}$ y $\frac{2}{10}$, y se determinan fracciones equivalentes para que las dos tengan el mismo denominador ($\frac{19}{100}$ y $\frac{20}{100}$), se puede observar claramente que $\frac{20}{100}$ es mayor que $\frac{19}{100}$, por lo tanto, 0.2 es mayor que 0.19. Este trabajo ayuda a erradicar la idea errónea de que un centésimo es mayor que un décimo, por su asociación con los números naturales 100, 10.
- Motivar el análisis e interpretación de los números decimales según el contexto en el que se expresan para evitar errores de lectura, por ejemplo, es común que niñas, niños y adolescentes interpreten 1.5 m como 1 metro con 5 centímetros, cuando en realidad es 1 metro con $\frac{5}{10}$ de metro, o lo que es lo mismo, 1 metro con 50 cm. Lo mismo ocurre con unidades de tiempo: 1.5 horas, significa 1 hora con 30 minutos, ya que $\frac{5}{10}$ o $\frac{1}{2}$ de una hora equivalen a 30 minutos. En ambos casos (1.5 m y 1.5 h) el número decimal es el mismo, sin embargo, representan valores diferentes, por la unidad de medida.
- Aclarar a niñas, niños y adolescentes que en algunos países los números decimales se representan con comas; por ejemplo: 0,5.
- Proponer actividades que impliquen representar y ordenar con recursos gráficos décimos, centésimos y milésimos. Por ejemplo, con apoyo de un rectángulo dividido en cien partes iguales, solicitar que se representen cierta cantidad de décimos, centésimos y milésimos. Después, plantear preguntas como: ¿cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?, ¿qué parte de un décimo es un centésimo?, ¿qué parte de un centésimo es un milésimo?, ¿y un décimo?, ¿cuántos centésimos son seis décimos?, ¿y cuántos milésimos?
- Plantear situaciones que impliquen comparar números con el apoyo de la recta numérica o ubicar en ella un número decimal entre dos números dados.
- Proponer situaciones que impliquen poner en práctica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas, por ejemplo, si las y los estudiantes reconocen que 0.5 es equivalente a $\frac{1}{2}$, entonces, sabrán que cuando se multiplica un número natural por 0.5, basta con calcular la mitad. O, para obtener el resultado de




3×2.8 , una manera es identificar que 2.8 es equivalente a $2 + \frac{8}{10} + 2 + \frac{8}{10} + 2 + \frac{8}{10}$, esto es igual a $6 + \frac{24}{10}$, $6 + \frac{24}{10} = 6 + 2 + \frac{4}{10} = 8.4$

- Plantear situaciones de estimación y cálculo mental, ya que estas habilidades juegan un papel muy importante para la comprensión de los números y de las operaciones.

Actividades para el aprendizaje

El sorteo⁷

El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes. Se muestra al grupo el siguiente anuncio y se comenta que se plantearán varios retos y los equipos podrán ganar 5 puntos cada vez que los respondan correctamente.



**GRAN SORTEO
PREMIO MAYOR**

122050	58139	578375	78211
971551	85111	628793	214169
232816	551200	41036	109692
69617	381996	09423	59768
54780	602872	147075	47430

- Reto 1: Entre los números se encuentra el ganador de la bicicleta. Cada equipo puede hacer preguntas que se respondan con “SÍ” o “NO” para saber cuál es ese número, y se pone un ejemplo: *¿Es un número de cinco cifras?, ¿tiene 9 unidades de millar?* En el pizarrón se van registrando las características que los equipos acierten para que puedan “construir” el número seleccionado.
- Reto 2: Seleccionar dos números del anuncio, leerlos en voz alta y decir el antecesor y sucesor de esos números.
- Reto 3: De los números de dos columnas, escribir el antecesor y sucesor de cada uno.
- Reto 4: A partir del número que se escoja grupalmente, formar una sucesión de 6 números, sumando cada vez otro número; por ejemplo, si se escoge 122050 y se le suma 25 cada vez, se puede formar la siguiente serie: 122 050, 122 075, 122 100, 122 125, 122 150, 122 175, 122 200.
- Reto 5: Escribir los números del sorteo comprendidos entre: 600 000 y 699 999, 900 000 y 999 999.

⁷ Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 07. México.

Es importante que antes de pasar a otro reto, grupalmente se revisen y validen las respuestas de los equipos.

El mayor posible

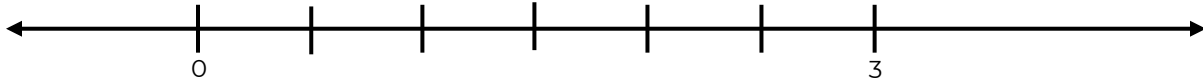
El grupo se divide en equipos de cuatro integrantes, que a su vez se divide en parejas. Cada equipo necesita 3 juegos de tarjetas con números del 0 al 9, es decir 30 tarjetas. Las tarjetas se revuelven y acomodan al centro de la mesa con los números hacia abajo. Por turnos cada niña o niño toma 2 tarjetas y las coloca sobre la mesa de manera que todo el equipo pueda ver los números. Cada pareja tendrá que ponerse de acuerdo para escribir el número mayor posible con los números de las tarjetas. La pareja que logre escribirlo gana un punto, y la que logre más puntos después de seis rondas gana el juego. La actividad se puede realizar en diferentes momentos, variando la cantidad de tarjetas o de jugadores.



Los números en la recta numérica

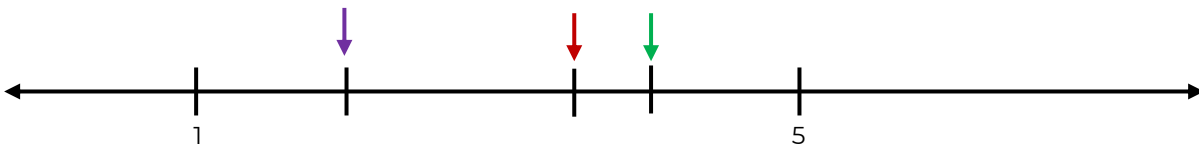
- Situaciones que implican ubicar números naturales, fracciones y números decimales en la recta numérica. Por ejemplo:

Ubica en la recta los números: 2.75 , $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$ y 1.5



- Situaciones que implican identificar un número natural, decimal o fracción en la recta numérica. Por ejemplo:

En el segmento (1, 5), ¿qué número está señalado con la flecha roja? ¿cuál número señala la flecha morada?, ¿cuál la verde?



Relacionando los números

El grupo se divide en equipos y a cada uno se entrega la siguiente tabla para que analicen cada uno de los casos y anoten la palabra **Verdadero** o **Falso**, según corresponda. Cuando terminen la mayoría de los equipos, las respuestas se revisan grupalmente. Si las respuestas no coinciden, se analizan los argumentos y entre todos llegan a un acuerdo.

Comparación	Argumento	Respuesta
$\frac{3}{6}$ es menor que $\frac{5}{6}$	Porque como ambas fracciones tienen el mismo denominador basta comparar los numeradores, así 3 es menor que 5	
$\frac{4}{8}$ es menor que $\frac{4}{9}$	Porque los octavos son más pequeños que los novenos.	
$\frac{6}{10}$ es menor que $\frac{13}{5}$	Porque $\frac{6}{10}$ es menor que un entero y $\frac{13}{5}$ es mayor que dos enteros.	
$\frac{8}{9}$ es mayor que $\frac{7}{8}$	Porque a $\frac{8}{9}$ le falta $\frac{1}{9}$ para completar el entero y a $\frac{7}{8}$ le falta $\frac{1}{8}$ y los novenos son más pequeños que los octavos.	
$\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{9}{18}$	Porque los medios son mayores que los dieciochoavos.	

Descubre lo que falta⁸

Las y los estudiantes se organizan en equipos de tres o cuatro integrantes. En el pizarrón se presenta una tabla como la siguiente:

Pasteles iguales	5		20		30		75			55
Estudiantes	4	8		10		12		1	2	

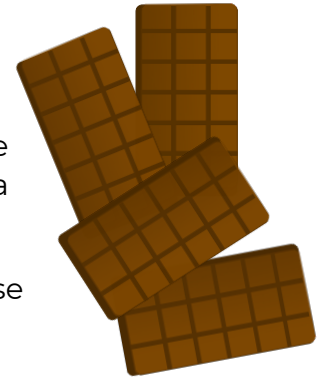
Enseguida, se explica al grupo que en la tabla deben anotar el número de pasteles o de estudiantes que faltan, con la condición de que siempre les toquen $\frac{5}{4}$ de pastel a cada estudiante. Se hace notar que la primera columna está completa: 5 pasteles y 4 estudiantes, y se invita a los equipos a comprobar si con esas cantidades se cumple la condición. Cuando la mayoría de los equipos haya terminado, se organiza la

⁸ Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 18. México.

presentación y discusión grupal de los resultados para que todos conozcan los procedimientos utilizados.

Las fracciones mixtas⁹

Para cada equipo se necesita una tira de cartoncillo de 12 cm de largo por 3 cm de ancho y una tira de aproximadamente un metro de largo por 3 cm de ancho. Para todo el grupo, una tira de 18 cm de largo por 3 cm de ancho, que debe permanecer oculta mientras las y los estudiantes resuelven el problema.



El grupo se organiza en equipos de cuatro o cinco integrantes, se reparte el material y se propone el siguiente problema:

Javier y sus cuatro amigos se repartieron cuatro chocolates iguales. A cada uno le tocó dos terceras partes de un chocolate, quedando una parte sin repartir.

- La fracción que le tocó a cada niño es igual a la tira de cartoncillo más chica que tienen. ¿De qué tamaño eran los chocolates enteros? Utilicen la tira más larga para averiguarlo.
- De los cuatro chocolates sobró una fracción, expresa esa cantidad.
- ¿Cuántos chocolates se comieron? Expresa la cantidad de chocolate que comieron, utilizando un número entero y una fracción.

Cuando la mayoría de los equipos terminan de representar con las tiras los chocolates enteros, deben compararlos para ver si resultaron iguales. Cada equipo nombra un representante para explicar cómo resolvieron el problema. Enseguida, se muestra la tira de 18 cm para compararla con las que obtuvieron las y los estudiantes.

Cuando las y los estudiantes expresan la cantidad de chocolate que se comieron, se aprovecha para introducir las fracciones mixtas como $3\frac{1}{3}$.

⁹ Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 35. México.



Comparación entre números decimales¹⁰

Se escriben cuatro listas con números decimales en el pizarrón y algunas o algunos estudiantes las leen en voz alta. Se pide al grupo que de cada lista, elijan dos números, los copien en su cuaderno y los escriban con letra. Enseguida se les pide que, en tablas como la que se muestra, ordenen los números de cada lista de menor a mayor.

- 1) 4.05, 4.50, 4.5, 4.500
- 2) 18.20, 18.2, 18.02, 18.020, 18.200
- 3) 37.048, 37.48, 37.480, 37.409
- 4) 10.19, 10.019, 10.910, 10.091

Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos

Multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas

Desde la Fase 3 niñas y niños han venido estudiando la multiplicación y la división a partir de la resolución de problemas que involucran sumas iteradas, arreglos rectangulares, repartos o agrupamientos mediante diversos procedimientos (gráficos, conteo, sumas o restas iteradas, algoritmo convencional), con el propósito de favorecer la construcción del concepto de multiplicación y división y su relación como operaciones inversas.

En la Fase 4 se propició el dominio de un repertorio de multiplicaciones de números de una cifra (tablas de multiplicar), y para ello el trabajo transitó de la comprensión a la memorización. El uso de material concreto y gráfico fue un recurso fundamental para trabajar las nociones de multiplicación y división.

Particularmente, en tercer grado las y los estudiantes resolvieron problemas que implican multiplicaciones con resultados de hasta tres cifras mediante diversos procedimientos, como la suma de multiplicaciones parciales o multiplicaciones por 10, 20, 30, y en cuarto grado, conocieron y usaron el algoritmo convencional para multiplicar números de tres cifras por números de dos cifras.

¹⁰ Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 47. México.

Con respecto a la división, conocieron y utilizaron un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras, además de reconocer que tanto el cociente como el residuo deben considerarse como resultados.

En esta Fase se continúa avanzando en la comprensión de los problemas que se resuelven con ambas operaciones, su relación como operaciones inversas y en el dominio de algoritmos. El trabajo se amplía al operar, además de números naturales, fracciones y números decimales, y con ello, se consolidan procesos de aprendizaje que serán la base para el estudio de contenidos en la Fase 6.

Hay diferentes tipos de problemas que se pueden resolver con una multiplicación o con una división, los más comunes son aquellos en los que **una cantidad se repite varias veces**, los que implican un **reparto equitativo** y los que requieren saber cuántas veces cabe una cantidad en otra (**agrupamiento**). Los tres tipos se trabajan en la Fase 4.

Los problemas que implican una división no siempre se resuelven de modo que el conjunto que se reparte o se agrupa se agota, por lo que la cantidad de objetos que quedan también deben considerarse como uno de los dos resultados de esa operación, el residuo. Esa cantidad debe ser menor que el divisor, pues de lo contrario se entiende que aún es posible formar más grupos o seguir repartiendo.

De ahí la importancia de observar y comprender la relación que existe entre los elementos de la división:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 1 \quad 3 \\
 3 \quad 2 \overline{) 4 \quad 3 \quad 0} \\
 \quad \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \quad \quad + \quad \quad \quad \\
 \quad \quad 1 \quad 4
 \end{array}$$

El cociente (C) multiplicado por el divisor (d), más el residuo (r), da como resultado el dividendo (D): $D = C \times d + r$

Al igual que con la suma y la resta, la estimación de resultados y el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones son habilidades que se deben practicar permanentemente para favorecer que las y los estudiantes distingan resultados factibles.

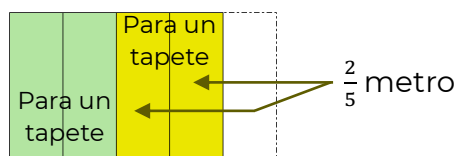
El estudio de las operaciones básicas en la Educación Primaria propicia que niñas, niños y adolescentes desarrollen su razonamiento deductivo e inductivo, relacionen conceptos y generen otros más complejos como razón, proporcionalidad, porcentaje, además, que comprendan y solucionen problemas cuantitativos e interioricen procedimientos.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades vinculadas con la multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas

- Propiciar que niñas, niños y adolescentes discutan, tomen decisiones y comprueben sus ideas acerca de cuál o cuáles son las operaciones que posibilitan la resolución de una situación problemática. Ello favorecerá que comprendan que la multiplicación y división son operaciones inversas.
- Considerar en la enseñanza dos aspectos: por un lado, los procesos que llevan a la construcción de los diferentes algoritmos de cada operación y, por otro, los distintos significados a los que pueden asociarse en los problemas que resuelven. Se sugiere abordar ambos aspectos a la vez, ya que los procedimientos que niñas, niños y adolescentes ponen en juego frente a un problema están ligados a la interpretación que ellos hacen de la situación.
- Generalmente, se dice que una multiplicación es una suma abreviada, sin embargo, esta expresión no es correcta, es más conveniente propiciar que niñas y niños identifiquen que uno de los significados de la multiplicación es representar situaciones en la que una cantidad se repite varias veces. Conviene alternar problemas que impliquen sumas de sumandos desiguales y otros que involucren sumas de sumandos iguales para que las y los estudiantes distingan en qué casos los problemas se pueden resolver con una multiplicación y en cuáles no.
- El algoritmo de la división es especialmente complejo, ya que pone en funcionamiento el conocimiento del valor posicional de la multiplicación y de la resta. Propiciar que la construcción del algoritmo sea a partir de situaciones que faciliten la exploración de las propiedades de los números y de las operaciones; por ejemplo, estimar el número de cifras del cociente, a partir de ciertos resultados como los productos por 10, 20, 100, 1000 etcétera.
- El control de los resultados y la comprensión de las acciones realizadas para resolver un problema o un cálculo pueden facilitarse si se pueden estimar los cocientes a partir de las propiedades de las operaciones y de la relación de la división con la multiplicación.
- Plantear situaciones problemáticas que impliquen:
 - Multiplicar fracciones o números decimales por un número natural como multiplicador.
 - Dividir números naturales y el cociente resulte un número decimal.
 - Dividir números decimales o fracciones entre números naturales.

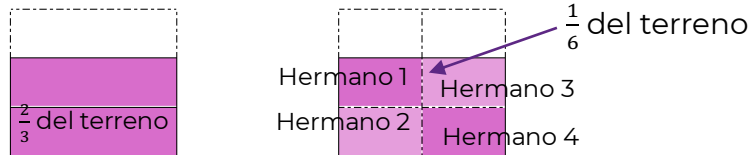
- Interpretar la multiplicación de fracciones o números decimales por un número natural como una suma de sumandos iguales (iterada):
 - ¿Cuántos metros de listón debería comprar si para terminar una carpeta necesito 20 tramos de 0.45 m?
 - El médico indicó tomar $\frac{1}{4}$ de tableta cada 20 minutos durante 5 horas continuas. ¿Cuántas tabletas se van a consumir en total durante ese tiempo?
- El algoritmo para resolver una división de números naturales en la que resulte un cociente decimal es una extensión del que se realiza para cocientes enteros: el residuo entero se convierte en décimos para seguir dividiendo. Los décimos sobrantes se convierten en centésimos, etcétera, y por lo tanto, se separan de los enteros con un punto decimal:
 - Se va a dividir una tira de cartoncillo de 3 metros en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte?
- Proponer problemas de reparto y agrupamiento que involucren una división de fracciones y números decimales entre un número natural; en el caso de fracciones, se sugiere utilizar como apoyo representaciones gráficas:
 - Se tienen 25.7 m de tela para elaborar 5 cortinas. ¿Cuántos metro se ocuparán para cada una?
 - Si se reparte $\frac{2}{3}$ de panqué en partes iguales entre 3 niñas, a cada una le toca...
- Para dividir un número decimal entre un número natural, iniciar con cocientes parciales antes de usar el algoritmo convencional. Por ejemplo:
 - En el caso de $14.5 \div 2$, se sabe que $2 \times 7 = 14$, entonces, el primer cociente parcial es 7. Luego dividir $0.5 \div 2 = 0.25$, que es el segundo cociente parcial, de modo que el cociente total es $7 + 0.25 = 7.25$.
- Es importante saber algunas técnicas de resolución que abrevien procedimientos, sin embargo, se recomienda que las y los estudiantes las conozcan y practiquen una vez que se han propuesto y experimentado diferentes formas de resolución. Por ejemplo:
 - Se tiene $\frac{4}{5}$ m de tela para hacer dos tapetes. ¿Cuánta tela se ocupará para cada uno?

El numerador es divisible entre el número natural, entonces, basta con dividir el numerador entre el número natural. Ejemplo: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5}$, porque:



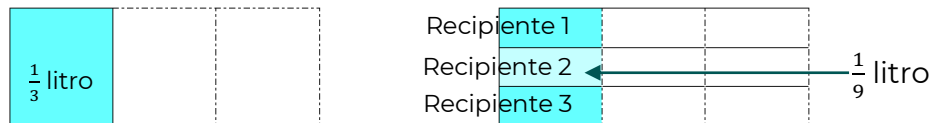
- Se va a dividir $\frac{2}{3}$ de un terreno entre 4 hermanos, ¿qué parte le toca a cada hermano?

El numerador no es múltiplo del divisor, entonces, conviene generar una fracción equivalente cuyo numerador sí lo sea: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, de esta forma $\frac{4}{6} \div 4 = \frac{1}{6}$, porque:



- La tercera parte de un litro de aceite se va a envasar en 3 recipientes, ¿cuánto aceite habrá en cada recipiente?

Si el numerador de la fracción es 1, el denominador de la fracción resultante es el producto del denominador por el divisor: $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$, porque:



- Los problemas de valor faltante y de porcentajes son propicios para desarrollar habilidades relacionadas con la multiplicación, la división y su relación inversa, cuando se determina la constante de proporcionalidad o cuando se representa el porcentaje como fracción ($\frac{75}{100}$) o decimal (0.75).

Una forma de calcular el 5 % de 600 es multiplicar la cantidad base por el tanto por ciento expresado como número decimal o razón: $0.05 \times 600 = \frac{5}{100} \times 600$.



¿Cuáles aspectos de los tratados destacarías, ya sea porque confirma sus saberes sobre el tema o porque no los tenía presentes? ¿cómo los incluiría en la planificación de sus clases?

Actividades para el aprendizaje

¿Quién resuelve más rápido?

En el pizarrón se escribe una operación, por ejemplo, 127×4 y se pide a las y los estudiantes que lo resuelvan mentalmente. Se hace la precisión de que pueden hacer algunas anotaciones, pero de lo que se trata es de resolverla mentalmente mediante diferentes estrategias.

En el pizarrón se anotan los resultados que se obtengan sin decir cuál es el correcto. En el mismo orden en que dieron sus resultados las y los estudiantes explican los procedimientos y estrategias que siguieron; estas se registran en el pizarrón y se aprovechan para mostrar diferentes escrituras, gráficas o cálculos.

Luego se analizan tanto los procedimientos como los resultados. En el caso de los primeros, se podrán evaluar los conocimientos sobre el sistema de numeración y sobre las operaciones y sus propiedades; respecto a los resultados, son las y los estudiantes quienes deben encontrar cuáles son los correctos.

¡Basta!

El grupo se organiza en equipos de dos o tres integrantes. Con anticipación se preparan 10 tarjetas con números naturales y decimales. Se pide a las y los estudiantes que dibujen en sus cuadernos una tabla como la que se dibuja en el pizarrón:

Número	$\times 10$	$\div 10$	$\times 100$	$\div 100$	$\times 1\,000$	$\div 1\,000$	TOTAL

Se muestra una tarjeta al grupo y el número se registra en la primera columna. Los equipos se deben poner de acuerdo para completar las seis casillas con los resultados de las operaciones: El primer equipo en completarlas dice en voz alta ¡Basta!, y comienza a contar del 1 al 10 para dar tiempo a que el resto del grupo termine. Los resultados se revisan colectivamente, por cada acierto, el equipo se anota 100 puntos, si el resultado no fue correcto se anota cero puntos. Después de siete u ocho rondas, ganan los equipos que logren más puntos.



Es importante que antes de iniciar una ronda se invite a algún equipo a que explique cómo obtuvieron uno de sus resultados.

La actividad también se puede realizar con fracciones, por ejemplo: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}$.

En este caso se recomienda que la tabla de juego sea como esta:

Número	$\times 2$	$\div 2$	$\times 3$	$\div 3$	$\times 4$	$\div 4$	TOTAL

El doble de...

En el pizarrón se escriben algunos números naturales, decimales o fracciones. Las y los estudiantes deben encontrar mentalmente el doble de cada uno y anotar en su cuaderno la estrategia que aplicaron, expresándola numéricamente o con un gráfico, para después explicarla y discutirla con sus compañeros.

Realizando divisiones¹¹

Conviene realizarla en varias sesiones, una por cada tipo de problemas. Se sugiere que el grupo se organice en parejas para resolver las divisiones y responder las preguntas. Grupalmente se comparten y validan las respuestas.

1. Calculen mentalmente el resultado de las siguientes divisiones y respondan las preguntas:

5 000 entre 100
3 200 entre 10
56 000 entre 1 000
18 300 entre 100
2 210 entre 10

¿Qué observan al dividir 2 210 entre 10?

¿Qué sucede al dividir 56 000 entre 1 000?

¿Y cuándo dividen 18 300 entre 100?

2. Sin efectuar la división, digan el número de cifras de los cocientes, considerando sólo su parte entera.

98 entre 30	208 entre 16
58 entre 8	5 375 entre 28
78 064 entre 52	7 548 entre 36
12 678 entre 15	45 980 entre 90
6 785 entre 24	1 654 entre 41

¹¹ Tomada de Secretaría de Educación Pública (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 41. México.

Para responder, los alumnos podrán seguir cualquier procedimiento. Por ejemplo, para saber cuántas cifras tendrá el resultado de dividir 208 entre 16, podrán multiplicar 16 por 10; como el resultado es 160 y todavía falta para llegar al 208, pueden multiplicar 16 por 20, lo que da 320. Como este resultado se pasa de 208, los alumnos conjeturan que el resultado de dividir 208 entre 16 se halla entre 10 y 20. Por lo tanto, el resultado tiene dos cifras.

3. Completen las operaciones realizando divisiones.

$$50 \times \underline{\hspace{2cm}} = 13\ 750$$

$$32 \times \underline{\hspace{2cm}} = 8\ 432$$

$$28 \times \underline{\hspace{2cm}} = 33\ 600$$

$$84 \times \underline{\hspace{2cm}} = 193\ 284$$

El reparto de dinero¹²

El grupo se organiza en equipos de cuatro estudiantes para realizar el reparto de dinero que se indica, con la condición de que a todas las personas les debe tocar la misma cantidad y debe sobrar lo menos posible. Antes de que las y los estudiantes comiencen a resolver los problemas se les pide que escriban en su cuaderno cuánto creen que le tocaría a cada persona.

$$\begin{aligned} & \$ 18\ 750 \text{ entre } 3 \text{ personas} \\ & \$ 9\ 625.40 \text{ entre } 5 \text{ personas} \\ & \$ 22\ 699 \text{ entre } 4 \text{ personas} \\ & \$ 72\ 375.50 \text{ entre } 6 \text{ personas} \end{aligned}$$

Es necesario permitir que las y los estudiantes usen sus propios recursos para encontrar la solución. Antes de iniciar la discusión, los diferentes resultados se anotan en el pizarrón, se organiza la revisión de los resultados y se comparan con las aproximaciones hechas al principio. Se invita a algunos equipos a explicar sus procedimientos.

En otra sesión, se organiza al grupo en equipos de cuatro integrantes. En el pizarrón se escribe la tabla que se muestra, y las y los estudiantes la copian en sus cuadernos. Se trata de calcular el total de dinero que se obtiene con los billetes y monedas que se indican o, de calcular cuántos billetes y monedas de cada valor se requieren para completar cierta cantidad.

\$ 500	\$ 200	\$ 100	\$ 50	\$ 20	\$ 10	\$ 5	\$ 2	\$ 1	50 ¢	10 ¢	5 ¢	TOTAL
2	3	6	3	1	3	1	5	3				
6	5	4	3	4	3	3	10	2	3	3	3	
												\$507.40
												\$358.75

¹² Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 48. México.



Se sugiere que algunas o algunos estudiantes escriban su resultado en el pizarrón y expliquen sus procedimientos. Si surgen resultados diferentes se discute en grupo para analizar los procedimientos utilizados.

Adivinanzas¹³

Se pide al grupo, organizado en parejas o equipos de tres integrantes, que resuelvan el problema. Cuando la mayoría de los equipos han terminado, las respuestas se comparten y valoran grupalmente.

Yovana y Rubén juegan a las adivinanzas:

Caso A:

- *Yovana*: Piensa un número. Multiplícalo por 15. ¿Qué número obtuviste?
- *Rubén*: 180.
- *Yovana*: Divídelo entre 5.
- *Rubén*: Me quedó 36.
- *Yovana*: ¿Pensaste el 12?
- *Rubén*: ¡Sí!

Caso B:

- *Rubén*: Piensa un número, y divídelo entre 3. ¿Qué número obtuviste?
- *Yovana*: 28
- *Rubén*: Multiplícalo por 11.
- *Yovana*: Son 308.
- *Rubén*: ¿Pensaste el 84?
- *Clara*: ¡Así es!

¿Cuál fue el truco que siguió Yovana para adivinar el número de Rubén?

El truco de Rubén ¿fue el mismo que usó Yovana? ¿Por qué?

En este problema no se espera el resultado de un cálculo, sino la descripción de procedimientos. En ambos casos está presente la relación de la multiplicación y la división como operaciones inversas:

- Caso A: $15 \times x = 180$, entonces $180 \div 15 = x$.
- Caso B: $x \div 3 = 28$, entonces $28 \times 3 = x$.

Corrección de errores¹⁴

Estos problemas exigen que las y los estudiantes reconozcan que un factor y el producto varían proporcionalmente, es decir, si uno aumenta al triple el otro también aumenta al triple, si uno se reduce a la mitad, el otro también se reduce a la mitad, etcétera. Para ello se organiza al grupo en parejas o equipos de tres integrantes. Los problemas se revisan grupalmente para compartir y revisar los resultados y los procedimientos que siguieron los equipos.

¹³ Adaptada de "Adivinanzas" en Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado (pp. 202-204). México.

¹⁴ Tomada de "Corrección de errores" en Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado (pp. 205-209). México.

PROBLEMA 1

En una calculadora se tecléo 35×100 , pero se cometió un error ya que se quería multiplicar por 50. ¿Cómo corregir sin borrar lo que ya está?

PROBLEMA 2

En otra calculadora se tecléo 325×500 , pero se quería multiplicar por 125. ¿Cómo corregirlo sin borrar?

Plan de ahorro¹⁵

Se trata de un problema que implica calcular una fracción de un número natural, esto se representa con la expresión " $\frac{a}{b}$ de n ". Para realizar este cálculo las y los estudiantes pueden recurrir a la multiplicación y división de números naturales. Para ello, se organiza al grupo en equipos de tres integrantes, y cuando la mayoría de los equipos hayan terminado, los resultados y procedimientos se comparten y revisan.

Manuel tiene un pequeño negocio y ha decidido ahorrar $\frac{2}{5}$ de la ganancia del día. Anota en la tabla las cantidades que faltan.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ganancia	\$215	\$245		\$280		\$504
Ahorro			\$122		\$168	



Revise nuevamente la actividad para el aprendizaje "¡Basta!". Seleccione seis de las 10 fracciones que se proponen y complete la tabla de multiplicaciones y divisiones.

¿Qué dificultades podrían enfrentar sus estudiantes al realizar la actividad?

¹⁵ Tomada de "Plan de ahorro" en Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado (pp. 205-209). México.

Proporcionalidad

El estudio de la proporcionalidad inicia en esta Fase a partir de las experiencias que las y los estudiantes han tenido al resolver problemas con multiplicaciones, en particular, aquellos en los que existe una relación proporcional entre las medidas de dos magnitudes: “si por un cuaderno se paga \$ 17.00, cuánto se paga por seis cuadernos”.

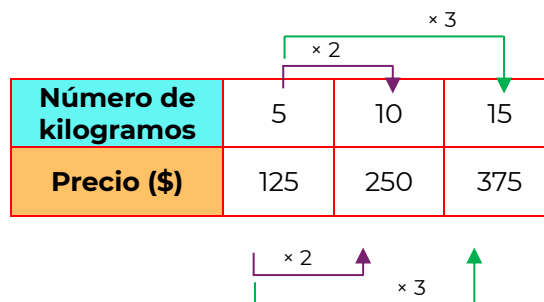
En diversas situaciones cotidianas una magnitud varía en función de otra. Por ejemplo: el importe a pagar por seis boletos si por dos se pagaron \$ 45.00, el tiempo en recorrer cierta distancia si se mantiene una velocidad constante de 80 km por hora, la cantidad de paquetes que se puedan guardar en diez cajas si en cuatro de ellas ya se han guardado 32 paquetes, etc. Esta relación entre magnitudes se denomina **proporcionalidad**, porque al aumentar o disminuir una cantidad, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

El **razonamiento proporcional**, es decir, la apropiación de nociones relacionadas con la proporcionalidad no es simple, requiere experimentar situaciones diversas en complejidad numérica y en el tipo de magnitudes relacionadas. Su estudio se desarrolla a lo largo de varios años. Este tipo de razonamiento hace referencia a detectar, expresar, analizar y explicar relaciones proporcionales, lo que implica utilizar un enfoque reflexivo para la resolución de problemas.

Respecto a las relaciones proporcionales, si al aumentar o disminuir una magnitud la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción, se trata de una **variación de proporcionalidad directa**. Pero, si una de las magnitudes aumenta mientras la otra disminuye en la misma proporción, se dice que se trata de una **variación proporcional inversa**. En Educación Primaria solo se estudia la primera.

En una variación de proporcionalidad, el valor que determina la relación entre las magnitudes es constante, por ello se denomina **constante de proporcionalidad**. Ese valor es el cociente que resulta de dividir los valores de cada magnitud. Por ejemplo, en una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de kilogramos de frijol y su precio:

		× 2	× 3
Número de kilogramos	5	10	15
Precio (\$)	125	250	375
		× 2	× 3



Si se divide la cantidad de kilogramos de frijol entre el precio de estos, la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{25}$ o 0.04, ya que $\frac{1}{25} = 0.04$; es decir, $5 \div 125$, se expresa $\frac{5}{125}$ que es equivalente a $\frac{1}{25}$, y este a su vez, es equivalente a $\frac{4}{100}$ o 0.04.

Si se divide el precio entre la cantidad de kilogramos de frijol, la constante de proporcionalidad es 25, ya que $125 \div 5 = 25$. Como se puede observar, en cada relación proporcional se distinguen dos constantes de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad es útil para calcular otros datos que se derivan de una relación proporcional:

kilogramos x constante de proporcionalidad	Precio	Precio x constante de proporcionalidad	kilogramos
5×25	125	$125 \times \frac{1}{25}$	5
10×25	250	$250 \times \frac{1}{25}$	10
15×25	375	$375 \times \frac{1}{25}$	15
20×25	500	$500 \times \frac{1}{25}$	20
40×25	1000	$1000 \times \frac{1}{25}$	40

Una proporción es una igualdad de **razones**. Esta igualdad puede darse al establecerse una relación de dos formas:

- Cuatro números que corresponden a una misma magnitud. Por ejemplo:
 - Para preparar un postre, una receta, indica que se necesitan 2 tazas de azúcar y 4 tazas de leche, y de acuerdo con otra receta, se necesitan 3 tazas de azúcar y 6 tazas de leche. ¿Con cuál de las dos recetas se tiene un postre más dulce? En ambas recetas la proporción de tazas es 1 de azúcar por 2 de leche ($\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$).
- Cuatro números que corresponden a dos magnitudes diferentes. Por ejemplo:
 - Para 32 paquetes se ocuparon 4 cajas, ¿cuántas cajas se necesitan para guardar 80 paquetes? En este caso, la proporción entre cajas y paquetes es de 8 paquetes por 1 caja ($\frac{32}{4} = \frac{80}{10}$).

Las razones que se expresan como “n de cada 100” se llaman **porcentajes**, por ejemplo, la razón “se cobran \$ 6 de impuesto por cada \$ 100”, se interpreta como \$ 6 de cada \$ 100 o $\frac{6}{100}$, y esto se representa con el signo del porcentaje: 6 %.

El porcentaje de una cantidad se puede calcular de diferentes maneras, por ejemplo, para obtener 5 % de 600:

- Contar 5 por cada grupo de 100 que integra 600, lo que resulta 30,
- calcular $\frac{5}{100}$ de 600 (600 se divide entre 100, el resultado se multiplica por 5),
- calcular la décima parte de 600 y el resultado dividirlo entre 2.

Una forma más de calcular un porcentaje es multiplicando la **cantidad base** por el porcentaje solicitado, expresado como un número decimal: **0.05×600** . Esto es posible porque 5 % es lo mismo que $\frac{5}{100}$ y la fracción $\frac{5}{100}$ escrita con punto decimal es 0.05.

Otros ejemplos de cómo calcular el porcentaje multiplicando por un número decimal son:

- 50 % de 420 se obtiene multiplicando 0.5×420
- 25 % de 420 se obtiene multiplicando 0.25×420
- 2 % de 420 se obtiene multiplicando 0.02×420

Las y los estudiantes suelen pensar que, para obtener el factor decimal equivalente a un porcentaje, basta con poner un punto decimal delante del número que representa el tanto por ciento, por ejemplo, 25 % = 0.25. Sin embargo, si no se tiene cuidado se comete el error de considerar 5 % como 0.5, cuando en realidad es 0.05, es decir, $\frac{5}{100}$.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la proporcionalidad

- Niñas, niños y adolescentes suelen tener conocimientos informales sobre la proporcionalidad, y al igual que con otros contenidos matemáticos, la introducción de símbolos o técnicas que se aplican para resolver situaciones relacionadas con esta noción, carecen de sentido si se hace prematuramente. En muchas ocasiones las y los estudiantes saben que existe cierta variación entre los números involucrados en una relación proporcional, pero no logran identificar cómo es esa relación. Por ello, un error común al resolver problemas de valor faltante es sumar o restar la misma cantidad a los dos términos relacionados. Por ejemplo:

¿Cuánto se pagará por 10 kg, 15 kg y 20 kg de frijol?

kilogramos	5	10	15	20
Precio	125	130	135	140



- Las situaciones que implican la proporcionalidad directa que se trabajan en Educación Primaria son los de tipo *valor faltante* (aquellos en los que se conocen tres datos y se busca un cuarto), ya que situaciones que involucran un *reparto proporcional* se abordan en la Educación Secundaria.
- El uso de procedimientos como: calcular el valor unitario, el doble, triple, la mitad, cuarta, décima parte, sumar dos o más de los valores conocidos para completar tablas de variación proporcional, permite que niñas, niños y adolescentes comprendan mejor las relaciones de proporcionalidad directa.
- Una idea errónea tanto de docentes como de estudiantes es considerar a la “regla de tres” como la técnica idónea para resolver todo tipo de situación de proporcionalidad en la que están involucrados tres números y una incógnita. Enseñar esta técnica como única estrategia resulta insuficiente para desarrollar de manera amplia las ideas fundamentales de la proporcionalidad, además de que no permite apreciar cuándo es conveniente utilizarla.
- Una razón se compone de dos magnitudes heterogéneas medibles, cada una con su respectiva unidad de medida. Por ejemplo, la velocidad 100 km/h es una razón entre dos magnitudes diferentes que son la distancia y el tiempo.
- Las razones se pueden expresar de distintas maneras. Por ejemplo, la razón 100 km/h, se puede expresar como: 100 km es a 1 h; $\frac{100}{1}$; 100:1, o $100 \rightarrow 1$.
- Las razones se pueden sumar. Por ejemplo, si un jugador de basquetbol encesta 3 canasta en 5 lanzamientos (3:5) y luego en 10 lanzamientos encesta 8 canastas (8:10), entonces, al sumar los lanzamientos y el número de canastas encestandas, se tiene que de un total de 15 lanzamientos, encegó 11 canastas (11:15).
- La relación proporcional entre dos razones que se derivan de la misma situación se expresa como una igualdad. Por ejemplo:

Melones (Piezas)	3	5	12	15	18
Precio (\$)	40	66.70	160	200	240

A 3 le corresponde 40 y a 12 le corresponde 160; por lo tanto, los dos pares de números forman una proporción, es decir:

$$\begin{matrix} 3 \rightarrow 40 \\ 12 \rightarrow 160 \end{matrix} \text{ y esto se expresa: } \frac{3}{40} = \frac{12}{160}, \text{ o bien como } \frac{3}{12} = \frac{40}{160}.$$

- Es importante tener presente que el porcentaje es una razón, para que, cuando se trabaje como fracción ($\frac{75}{100}$) o como decimal (0.75), se le vea como una relación y no solamente como un número.

- Reconocer que en la expresión: “20 % de \$ 300 son \$ 60”, se llama “cantidad base” a la cantidad original, es decir, \$ 300, “tanto por ciento” a la porción que se calcula, 20 %, y “porcentaje” a la cantidad que resulta, \$ 60.
- Realizar cálculos mentales con porcentajes, apoyándose en tantos por ciento como 50 %, 10 %, 1 %. Por ejemplo, para calcular 65 % de una cantidad pueden calcular la mitad de la cantidad (50 %), agregar lo correspondiente a 10 % y lo correspondiente a 5 %, que es la mitad del anterior.
- Proponer situaciones en las que las y los estudiantes descubran formas rápidas de calcular 10 % y 1 % de una cantidad. Por ejemplo, con apoyo de la calculadora identificar regularidades a partir de analizar los resultados.
- Plantear diferentes situaciones relacionadas con el porcentaje:
 - Si en una tienda todas las mercancías tienen un descuento de 30 %, calcular el precio final de varias mercancías, conociendo su precio original.
 - En la empresa “Omega”, el 10 % de los productos tienen algún defecto. En la empresa “Beta”, 2 de cada 100 productos tienen defectos. ¿En cuál empresa se hacen más productos defectuosos?
 - En una votación escolar, Rogelio recibió 20 % del total de votos, mientras que Brayan recibió $\frac{1}{4}$ del total. ¿Quién recibió más votos?
 - “98 % de las y los estudiantes de primaria recibieron la vacuna contra la COVID-19. Si hay 5 millones de alumnos en primaria, ¿cuántos ya recibieron la vacuna? ¿Qué porcentaje de estudiantes no la han recibido?”
 - Del ingreso que recibe una familia, 20 % se gasta en renta, 20 % en salud, 30 % en alimentos y otros productos para la casa, 10 % en transporte, 10 % en diversión y el resto se ahorra. ¿Qué porcentaje del ingreso de la familia se ahorra si el ingreso es de \$ 10 000?

Actividades para el aprendizaje

Problemas de valor faltante




- Situaciones en las que se conoce el valor unitario.
 - De manera explícita:

Cantidad de Camisas	1	10	15	20	25
Cantidad de botones por camisa	14				

- De manera implícita:

Jitomate (kg)	1	8	15		27
Precio (\$)		176		462	594

- O situaciones que combinen ambas:

	Cantidad de piezas		
Cantidad de paquetes			
1	12		
	36	54	
5			75
			105
9			
	120	180	150

- Situaciones en las que sea necesario usar factores internos, es decir, dobles, triples, etcétera, para resolverlos:

Melones (Piezas)	3	5	12	15	
Precio (\$)	40			200	240

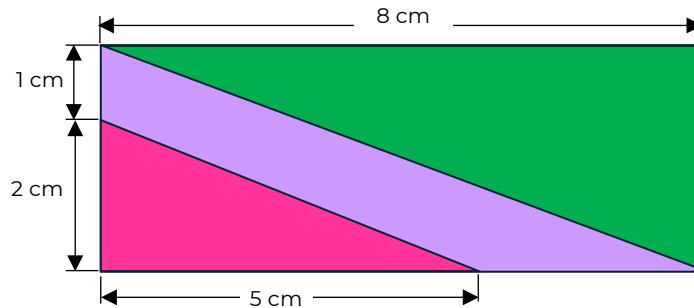
- Situaciones que impliquen la identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales):

- Para preparar ensalada para cuatro personas se requieren manzanas y zanahorias en cierta proporción. Completa la tabla para saber cuántas tazas de manzana o zanahoria voy a necesitar si preparo ensalada para más personas.

Tazas de manzana picada	2	5	7	9	
Tazas de zanahoria picada	6	15	21		

- Se van a reproducir a escala banderas con tres figuras y colores diferentes como esta, de tal forma que el lado que mide 1 cm, mida 2 cm. ¿Cuánto debe medir

cada lado de las figuras? Elabora la tabla con las medidas que resultan y traza la bandera para comprobarlo.



- Situaciones en los que los valores faltantes se calculen a partir de sumar dos o más valores conocidos.
 - Por dos paquetes de galletas se pagaron \$ 18, por tres paquetes se pagaron \$ 27, entonces, ¿cuánto se pagará por cinco paquetes?, ¿por siete?, ¿por once paquetes?

Problemas relacionados con el porcentaje

- Préstamos con intereses¹⁶

Se trata de que las y los estudiantes calculen porcentajes aplicando la correspondencia “por cada 100, n”, a través de diversos procedimientos. Se pide al grupo que, con base en la información de un anuncio, calculen el interés mensual a pagar por diferentes cantidades:

Te prestamos desde \$ 100 hasta \$ 50 000.

Paga un interés mensual de solamente 5 %, es decir: por cada \$ 100 paga solo \$ 5.

Cantidad (\$)	Interés (\$)
100	
125	
200	
500	

Cantidad (\$)	Interés (\$)
1 000	
1 625	
2 650	
2 500	

¹⁶ Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto Grado. (pp.60-61). México.

• **Descuentos¹⁷**

Mediante diferentes procedimientos el grupo, organizado en parejas calcula cantidad base, porcentaje o tanto por ciento que representa una cantidad de otra, en situaciones de descuentos.

- Diego logró ahorrar \$750 y con ese dinero decidió comprar un pase para visitar un parque ecológico que costaba \$450; al pagarlo, se enteró que tenía un descuento. ¿Qué tanto por ciento le descontaron, si al salir de la taquilla aún tenía \$390 de sus ahorros?
- El 10% del precio de un artículo es igual a \$16. Completen la tabla con los diferentes porcentajes de descuento para el mismo artículo:

Porcentajes	Descuento (\$)	Precio con descuento (\$)
5 %		
10 %	16	144
15 %		
20 %		
25 %		
30 %		
50 %		80
75 %		

• **Cálculo de porcentajes mayores al 100 %¹⁸**

El grupo se organiza en parejas resuelve problemas como:

El precio de un producto es de \$240. El cliente le pide al empleado que le haga una factura y éste le responde que en tal caso debe agregar al precio inicial el 16% de IVA. ¿Cuál es el precio del producto con IVA?

Otra refacción cuesta \$ 415.28 con el IVA incluido. ¿Cuál es el precio de la refacción sin ese impuesto?

¹⁷ Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto Grado. (pp. 62-64 y 96-97). México.

¹⁸ Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto Grado. (pp. 98-99). México.

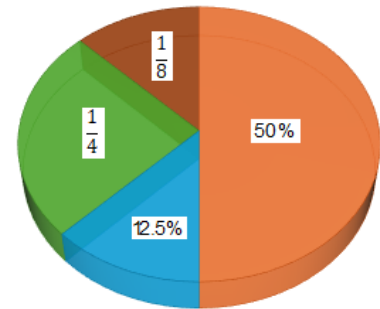
• **Porcentaje y fracciones**¹⁹

En vinculación con Organización e interpretación de datos, se presenta al grupo una gráfica circular y una tabla, para que en parejas, resuelvan problemas de porcentaje expresado como fracción y analizan la proporción.

La población de niñas y niños menores de 16 años en una ciudad es de 4 600. En la gráfica se muestra su distribución por edades.

Completa la siguiente tabla:

Edad	%	Fracción	Población
Menores de 16 años		1	4 600
12 a 15 años		$\frac{1}{2}$	
8 a 12 años	25		
4 a 7 años		$\frac{1}{8}$	
0 a 3 años			460



- ¿Qué porcentaje corresponde a la población de 4 600 niñas y niños?
- ¿Qué cantidad de niñas y niños representa la mitad de población?, ¿qué porcentaje es?
- ¿Qué fracción de la población total representa 25%?, ¿a cuántas niñas y cuántos niños corresponde?
- ¿Qué fracción del total representan 460 niñas y niños?, ¿qué porcentaje le corresponde?

Comparación de razones

Se organiza al grupo en equipos de tres o cuatro integrantes y se presenta un problema:

- En la papelería un paquete de cuatro cuadernos cuesta \$45 y en la cooperativa de la escuela un paquete de tres cuadernos del mismo tipo cuesta \$36. ¿En qué lugar es preferible comprar los cuadernos? ¿Por qué?

¹⁹ Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. Ficha 21. México.

- En el recipiente azul se preparó naranjada con 3 vasos de agua por cada 2 de jugo concentrado. Y en el recipiente verde se preparó naranjada con 6 vasos de agua por cada 3 del mismo jugo. ¿Cuál sabe más a naranja? ¿Por qué?

Cuando la mayoría de los equipos hayan terminado, se comparan y argumentan procedimientos y resultados.



Revise nuevamente los Problemas de valor faltante y resuelva los tres ejemplos, intente hacerlo sin recurrir a la Regla de tres.

Ahora, elabore una lista de los procedimientos que puso en práctica para resolver cada caso.

Fuentes de consulta

Ávila, A. y García, S. (2008). Los decimales: más que una escritura. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D402.pdf>

Chamorro, M. (2006). Didáctica De las Matemáticas para Primaria. PEARSON. Prentice Hall. México. México. <https://archive.org/details/chamorro-m.-a.-didactica-de-las-matematicas/page/n3/mode/2up>

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 4° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_04_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 5° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_05_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 6° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_06_mate.pdf

Fazio, L., Siegler, R. (2010). Enseñanza de las fracciones. Capítulo 2: Las fracciones son números (pp. 10-11). https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000212781_spa

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, enero-abril, número 043. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Madrid, España. pp. 119-130. <https://rieoei.org/historico/documentos/RIE43A06.pdf>

Ferrer, Maribel. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba. <https://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/indice.htm>

García, S. (2014). Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INEE. <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D416.pdf>

Godino, J. (Coord.), (2004). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Sistemas numéricos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Iltzovich, H; Broitman, C. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB. Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación.

<https://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2012/06/division.pdf>

Jones, K. & Edwards, J-A. (2017). Planning for mathematics learning. In S. Johnstone-Wilder, C. Lee, & D. Pimm (Eds.) (2017), Learning to teach mathematics in the secondary school: A companion to school experience (chapter 5). Abingdon: Routledge. 4th edition (pp. 70-91). Johnston-Wilder S., Lee C., Primm D. (2016).

https://www.academia.edu/110953469/Learning_to_teach_mathematics_in_the_secondary_school_a_companion_to_school_experience?uc-sb-sw=9477367

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., y Zanocco, P. (2014). REFIP Matemática: Números para futuros profesores de Educación Básica. Santiago: Ediciones SM.

<https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/15621>

Llinares, S., Sánchez, M. (1998). Fracciones. Capítulo 4 (pp. 114-115). España: Editorial Síntesis.

https://www.academia.edu/41365849/Fracciones_La_relaci%C3%B3n_parte_todo

López, J. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Manizales, Colombia.

<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/9116/8410009.2012.pdf?sequence=1>

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres, en *Educación Matemática*, Vol. 24, Núm. 1, Abril de 2012.

<https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf>

OCDE, OIE-UNESCO, UNICEF LACRO (2016). La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica. Serie Aprendizajes y Oportunidades.

https://panorama.oei.org.ar/_dev/wp-content/uploads/2017/09/UNICEF_UNESCO_OECD_Naturaleza_Aprendizaje_.pdf

Parra, C. y Saiz, I. (comps). (1994). Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Editorial Paidós SAICF. Argentina.

Parra, C. y Saiz I. (2008). Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio. SEP / Homo Sapiens Ediciones. México.

Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P. (1994). Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. Matemáticas y su enseñanza. Documento curricular P.T.F.D., en Matemática, Documento de trabajo No. 5 La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación. Argentina.
<http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf>

Rapetti, Ma. (2003) Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. SUMA⁴⁴. Noviembre 2003, pp. 65-70.
<https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/44/065-070.pdf>

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.2, pp.809-824.
<http://funes.uniandes.edu.co/26411/1/Rodr%C3%ADguez2016Habilidades.pdf>

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5. Pp. 13-66.
https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libros para el maestro. Quinto grado. México.
[Desafíos matemáticos. Libro para el maestro Grado 5° Generación 2014. : Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. : \(conaliteg.gob.mx\)](https://www.conaliteg.gob.mx/DesafiosMatematicosLibroParaElMaestroGrado5oGeneracion2014)

Secretaría de Educación Pública. (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado. México.
[Desafíos matemáticos. Libro para el maestro Grado 6° Generación 2014. : Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. : \(conaliteg.gob.mx\)](https://www.conaliteg.gob.mx/DesafiosMatematicosLibroParaElMaestroGrado6oGeneracion2014)

Secretaría de Educación Pública. (2024). Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 3. Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente. México.
https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Desarrollo-de-habilidades-matematicas_Primaria_Fase-3.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2024). Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 4. Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente. México.
<https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/08/Cuadernillo-Matematicas-Fase-4.pdf>

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Cuarto grado. México.
<https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-4to.pdf>

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Quinto grado. México.



<https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-5to.pdf>

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Sexto grado. México.

<https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-6to.pdf>

Ursini, S. y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. Revista Colombiana de Educación, (73), 213-234.

<http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n73/0120-3916-rcde-73-00213.pdf>