Desarrollo de habilidades. Matemáticas

Primaria. Fase 4

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Martha Velda Hernández Moreno
Subsecretaria de Educación Básica

Xóchitl Leticia Moreno Fernández
Directora General de Desarrollo Curricular

Material elaborado por la Dirección de Desarrollo Curricular para la Educación Primaria

Julio de 2024

Índice

Presentación

Estimada maestra, estimado maestro

Con la intención de enriquecer sus experiencias de apropiación de la nueva propuesta curricular, y contribuir en su formación profesional, la Secretaría de Educación Pública ha considerado la elaboración de **Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente** cuyo propósito es abordar temas fundamentales para el aprendizaje de niñas, niños y adolescentes que cursan la Educación Básica.

Bajo la premisa que la reflexión es la vía que permite mejorar como docente, este cuaderno de trabajo, **Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 4,** pretende propiciar un proceso de análisis, discusión e investigación acerca de cómo desarrollar habilidades del Campo formativo, a partir del estudio de los contenidos matemáticos, y con ello, contar con mejores herramientas para promover ambientes de aprendizaje orientados al logro del Perfil de egreso.

Para lograr este objetivo, los contenidos del cuaderno de trabajo se organizan en dos capítulos. El primero, **Desarrollo de habilidades a partir del estudio de contenidos de matemáticas**, incluye textos retomados de investigaciones educativas sobre la didáctica de las matemáticas y actividades que motivan la reflexión en torno a su enseñanza y aprendizaje. Con ello se pretende valorar prácticas pedagógicas que propician el desarrollo de habilidades y la comprensión y uso de conceptos, métodos y técnicas de esta disciplina.

En el segundo capítulo, **Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas**, se han organizado seis apartados para abordar los contenidos matemáticos considerados en el Programa Sintético de la Fase 4:

1. Números
2. Suma y resta, y su relación como operaciones inversas
3. Multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas
4. Cuerpos y figuras geométricas
5. Medición
6. Organización e interpretación de datos

A manera de introducción, en cada apartado se destaca la importancia del estudio del contenido y se incluyen conceptos, algunas ideas que prevalecen entre las y los docentes sobre su enseñanza, recomendaciones y orientaciones sobre cómo abordarlo.

En "Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades" se enlistan algunas ideas que tienen niñas y niños sobre el tema, así como sugerencias didácticas.

La sección "Actividades para el aprendizaje" integra algunas actividades factibles de ponerse en práctica para favorecer el desarrollo de habilidades, a partir del trabajo con los contenidos de matemáticas del Campo formativo. En ese sentido, la intención no es agotar lo que podría realizarse fuera y dentro del aula para lograr ese cometido, sino proponer ejemplos que estimulen la creatividad y construcción de otras situaciones que generen aprendizajes significativos.

A lo largo del cuaderno se distinguen tres iconos:


Se propone lecturas de textos.


Se proponen ideas que motivan cuestionar la práctica docente.


Se propone la construcción de actividades didácticas que integren algunos elementos de las diferentes secciones del apartado.

Finalmente se incluyen las **Fuentes de consulta** que además de dar sustento a esta propuesta, se presume serán de utilidad para fortalecer los saberes docentes.

Le sugerimos disponer de un cuaderno para hacer anotaciones, resolver las actividades y registrar sus conclusiones. De ser posible, comparta sus experiencias e inquietudes con sus colegas para que le retroalimenten.

Capítulo 1. Desarrollo de habilidades a partir del estudio de contenidos de matemáticas

Desde el Campo formativo Saberes y Pensamiento Científico se plantea la intención de que el estudio de las ciencias naturales y de las matemáticas propicie en niñas, niños y adolescentes la capacidad de analizar distintas concepciones del mundo y tomar decisiones sobre la explicación más adecuada para comprender la realidad al momento de resolver o enfrentar una situación en particular.

En este marco, el desarrollo de habilidades para observar, cuestionar, clasificar, comparar, ordenar, experimentar, analizar, describir, relacionar, inducir, verificar, inferir, modelar, contar, formular algoritmos, registrar de manera más sistemática, se reconoce como un proceso que se transita paralelamente a la construcción de conocimientos y al fortalecimiento y fomento de valores y actitudes indispensables para participar en la resolución de problemas, generar y expresar opiniones propias y contribuir en la transformación sustentable de la comunidad, es decir, poner en práctica el pensamiento crítico.

De manera que en este capítulo se proponen textos y actividades que motivan la reflexión en torno a sus experiencias docentes relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. La intención es identificar aquellas prácticas que propician el desarrollo de habilidades y la comprensión y uso de conceptos, métodos y técnicas de esta disciplina, contar con elementos para generar ambientes favorables para un aprendizaje significativo, así como invitarle a seguir investigando para enriquecer sus saberes respecto a cómo niñas y niños aprenden matemáticas.

Encuentros y desencuentros con las matemáticas

El siguiente fragmento es parte de la introducción del libro "Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio"[1], de Cecilia Parra e Irma Saiz.

Los alumnos aprenden matemáticas a partir de lo que tienen oportunidad de hacer en relación con el conocimiento. Aprenden matemáticas trabajando frente a las situaciones que el maestro ha seleccionado y les plantea. Aprenden actuando. Aprenden pensando sobre lo que hacen y sobre lo que imaginan.

Se busca que aprendan por sí mismos, pero eso no debe confundirse con que aprenden solos. Justamente porque no aprenden solos es que vienen a la escuela.

En la escuela aprenden porque los maestros conciben y llevan adelante un proyecto intencional con el fin de que ellos aprendan muchas cosas en no mucho tiempo.

Promover las prácticas de los alumnos en torno al conocimiento no es tarea fácil. Los alumnos tienen ritmos distintos. Organizar la actividad de los alumnos, sus intercambios, de modo que se aseguren aprendizajes en cada uno de ellos es un enorme desafío para los maestros.

Muchas veces ese desafío resulta muy cuesta arriba y entonces se opta por maneras de enseñar que no son desafíos para los niños: se presentan los temas, se enseñan unas maneras fijas de proceder, se ejercita, y los resultados son los acostumbrados, a unos pocos no les cuesta aprender esos contenidos, a la mayoría le cuesta bastante. Y continúa la historia: mucha gente no quiere saber nada con la matemática cuando sale de la escuela.

Ese desencuentro con la matemática que la mayoría de los adultos manifiesta probablemente empezó a temprana edad y en la escuela. Aun con las cuestiones que parecen más simples, como el contacto con los primeros números, la enseñanza puede plantearse de modos que favorecen que cada uno se apropie, se adueñe de los

[1] Parra, C. y Saiz I. (2008). Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio. SEP / Homo Sapiens Ediciones. México.

conocimientos, o de modos enajenantes, en los que el conocimiento es algo de otros, sin sentido, y que no se sabe utilizar.

La preocupación respecto de que nuestras enseñanzas les permitan a los alumnos construir sentidos no es patrimonio de la educación matemática. Al contrario, inscribe a la enseñanza de la matemática en la amplia y antigua búsqueda de los educadores: ayudar a los alumnos a dar sentido al mundo en que viven, aprender a interactuar con él y a resolver, junto a otros, los problemas que plantea.

Reflexione sobre los siguientes cuestionamientos:

- ¿A qué se refieren las autoras al afirmar que “los niños aprenden matemáticas actuando, pensando sobre lo que hacen y lo que imaginan”? ¿Considera usted que estas acciones involucran el desarrollo de habilidades? ¿Cuáles?
- Parra y Saiz mencionan que organizar una actividad en ocasiones resulta un desafío mayor para la o el docente, entonces opta por maneras de enseñar que dan como resultado que el estudio de las matemáticas resulte desagradable para las y los estudiantes. De acuerdo con su experiencia, ¿qué tipo de enseñanza causa tal efecto?
- ¿Qué otras ideas del texto de Parra y Saiz destacaría usted?

En la introducción del mismo libro las autoras también incluyen tres valoraciones a las que denominan “miradas” sobre los conocimientos, sobre los aprendizajes y sobre la enseñanza:

Una mirada sobre los conocimientos

Los conocimientos matemáticos, (...), que los alumnos tienen que aprender en el jardín de Infantes y en los primeros años de la Escuela Primaria, están tan incorporados a la cotidianeidad que resulta difícil para los adultos no especializados tomar conciencia de la complejidad y multiplicidad de aspectos involucrados. Constituyen instrumentos culturales construidos en tiempos tan pretéritos que con frecuencia se olvida que fueron construidos para resolver problemas, que supusieron la elaboración de procedimientos y técnicas de obtención y tratamiento de la información, así como de medios de representación y de comunicación. Todos estos aspectos son constitutivos del conocimiento, como los medios de control de su utilización y los fundamentos para su justificación.

Apropiarse de estos conocimientos supone, para los alumnos, una verdadera reconstrucción que, sin poder ser entendida como un recorrido por sucesivos momentos históricos, no puede saltarse ninguno de los grandes hitos que jalonearon su evolución.

[...]

Debemos al maestro Guy Brousseau[2] el haber elaborado una teoría que modeliza las condiciones bajo las cuales los seres humanos producen y aprenden los conocimientos que reconocemos como matemáticos.

[...]

Con apoyo en esta teoría se ha formulado un punto de partida fundamental para la enseñanza: **El tipo de prácticas que un alumno despliegue a propósito de un concepto matemático constituirá el sentido de ese conocimiento para ese alumno.**

Una mirada sobre los aprendizajes

Como hemos dicho, partimos de la convicción de que los alumnos aprenden matemáticas a raíz de lo que tienen oportunidad de hacer con relación al conocimiento. **Esta actividad matemática desarrollada por los alumnos no consiste habitualmente en un proceso lineal. Por el contrario, se compone de búsquedas, intentos, errores, hallazgos, dudas, certezas, revisiones, formulaciones, nuevas búsquedas, y es precisamente esa sinuosidad la que constituye su riqueza.**

[...]

Los niños son muy capaces de ponerse a trabajar cuando se los convoca a hacer algo a lo que pueden otorgar sentido. Muestran alegría cuando algo «funciona», cuando logran resolver, cuando entienden algo y pueden dominar ese «funciona», cuando logran resolver, cuando entienden algo y pueden dominar ese «pedacito del mundo» que el problema les propone. **Crecen (incluso a sus propios ojos) cuando están seguros de algo que afirman e incluso cuando pueden identificar con**

[2] Guy Brousseau comenzó su carrera profesional como maestro de escuela primaria. Se formó posteriormente como matemático y obtuvo el título de doctor en Ciencias de la Universidad de Burdeos. Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de la Matemática es la Teoría de Situaciones Didácticas. Tomado de Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.

claridad en qué se han equivocado. Son capaces de realizar genuina actividad matemática.

Una mirada sobre la enseñanza

Basados en la convicción de que la actividad de resolución de problemas constituye no sólo el criterio o el móvil del aprendizaje, sino en principio su lugar y su medio[3], **se impulsa desde hace muchos años plantear a los alumnos situaciones que van a enfrentar con los recursos de los que disponen. A la vez, se plantea que la situación es verdaderamente un problema si los alumnos encuentran allí una cierta «resistencia», un desafío frente al cual resulta necesario revisar aquello con lo que cuenta, producir nuevas respuestas, poner en juego otros conocimientos (precisamente el conocimiento al que se apunta).**

La difusión de este enfoque ha provocado, en muchos casos, una mayor presencia de problemas en las aulas y un descrédito de las «cuentas peladas».

Sin embargo, este mensaje, tan largamente difundido, resulta víctima de versiones simplificadoras, ya que no hay «llaves mágicas» y no basta un problema, por muy bueno que sea, para que se produzcan los aprendizajes buscados.

En los recuadros se han resaltado ideas que dan cuenta de lo que implica el aprendizaje y la enseñanza de conocimientos matemáticos.

- ¿Qué relación encuentra usted entre esas ideas?
- ¿Cómo las relaciona con su práctica docente?
- ¿Qué aspectos tomaría en cuenta al realizar su planeación didáctica?

[3] Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas, en: Parra, C. y Saiz, I. (1994)

Dos escenarios, un camino

En el apartado anterior se inició la reflexión acerca de cómo niñas y niños aprenden matemáticas, en el entendido de que ese proceso implica el desarrollo de habilidades, a la par de la construcción de conceptos, métodos y técnicas, así como la práctica de valores y actitudes.

La intención ahora es enfatizar dos cuestiones fundamentales: la forma como las y los estudiantes interactúan durante la clase de matemáticas y la situación problemática que puede propiciar un aprendizaje.

Para ello, se describe lo ocurrido en dos aulas diferentes donde se estudia un contenido matemático[4]:

Aula 1

- El profesor revisa el concepto de suma con sus estudiantes
- El profesor explica cómo resolver una suma; sus estudiantes practican con algunos ejemplos
- El profesor explica cómo comprobar si la suma se resolvió correctamente; sus estudiantes practican con algunos ejemplos
- Las y los estudiantes trabajan individualmente sobre un problema que se resuelve con una suma

Aula 2

- El profesor presenta un problema que podría resolverse con una suma
- Sus estudiantes tratan de resolver el problema individualmente o en equipos; el profesor escucha y cuestiona sus argumentos y acuerdos
- Los equipos presentan y discuten colectivamente las soluciones del problema junto con explicaciones del profesor, con miras a una solución general
- Las y los estudiantes practican con algunos problemas

[4] Los escenarios descritos son una adaptación a los que Keith Jones y Julie-Ann Edwards incluyen en su artículo “Planning for mathematics learning” (Planificación del aprendizaje matemático), al referirse a dos formas típicas en que se desarrollan lecciones de matemáticas. En S. Johnstone-Wilder, C. Lee, & D. Pimm (Eds.) (2017), *Learning to teach mathematics in the secondary school: A companion to school experience* (chapter 5). Abingdon: Routledge. 4th edition (pp. 70-91). Johnston-Wilder S., Lee C., Primm D.

Se puede apreciar que la manera en que las y los estudiantes se involucran en la clase es diferente en las dos aulas, en consecuencia, el nivel de logro de aprendizaje también evidenciará diferencias. Las y los estudiantes que escuchan con atención el procedimiento que explica el profesor y después lo aplican al resolver problemas semejantes, interactúan con el maestro, entre ellos y con el concepto matemático de distinta forma a como lo hacen quienes tratan de resolver el problema, comparten sus soluciones y verifican la efectividad del procedimiento seleccionado.

- ¿Cómo es la participación de las y los estudiantes del Aula 1?, ¿cuál es la del docente?
- ¿Cómo es la participación de las y los estudiantes del Aula 2?, ¿cuál es la del docente?
- ¿Con cuál de estas prácticas se identifica usted? ¿Por qué?
- ¿Considera que en ambas aulas las y los estudiantes desarrollan habilidades?, ¿cuáles se desarrollan en el Aula 1?, ¿cuáles en el Aula 2?
- ¿Cuáles de las habilidades que identificó están presentes en los Programas sintéticos de la Fase 4?

Se ha considerado la resolución de problemas como el medio para aprender matemáticas en la escuela, a la vez de ser el fin para el cual se estudian. Sin embargo, a pesar de que en las aulas las y los estudiantes resuelven problemas cotidianamente, no logran hacerlo con efectividad y de manera autónoma.

Una condición para tomar en cuenta es que en muchas aulas los problemas se proponen al finalizar el tratamiento de un tema, como ocurre en el Aula 1, lo que provoca que los conceptos, métodos o técnicas enseñadas sean ajenas a las y los estudiantes, porque resultan abstractas, alejadas de su comprensión y su uso carece de sentido. Si bien logran cierto dominio algorítmico o memorizan un concepto, no son capaces de aplicarlo al resolver una situación problemática, un reto. Por ende, el desarrollo de habilidades y la construcción de conocimiento son escasos o no ocurren.

En el Aula 2 con el problema se inició el tratamiento del tema, y para resolverlo las y los estudiantes comentan, proponen, argumentan, ponen en práctica sus saberes y a prueba sus propuestas, las mejoran o las cambian, de modo que los conceptos, métodos o técnicas involucradas les son cercanas, porque se involucraron en su construcción.

El Diagrama 1 representa la forma como se desarrolla la clase del Aula 2:

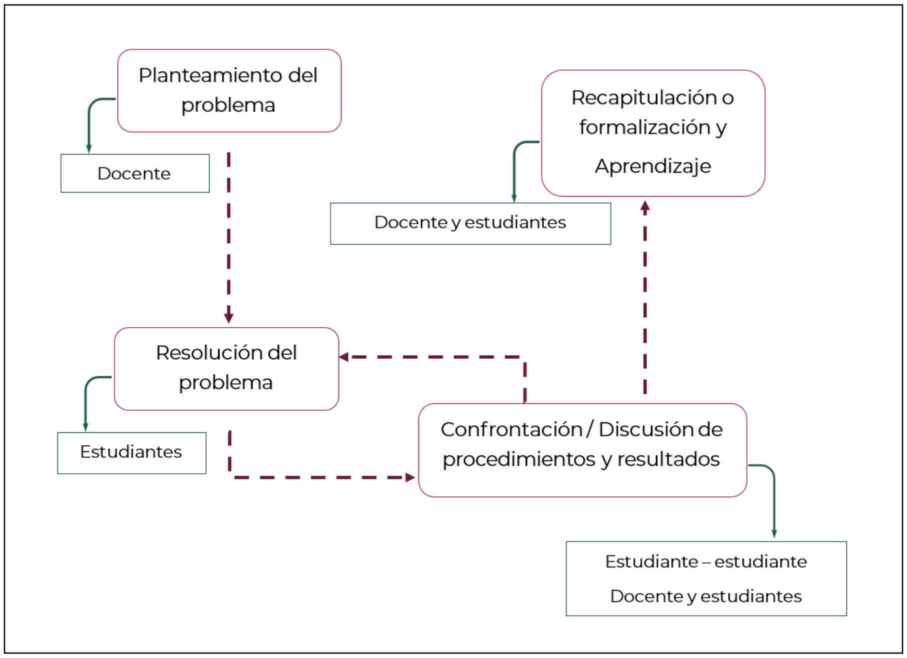


Diagrama 1. Creación equipo académico DGDC Primaria

Como se puede observar, en una clase como estas, las y los estudiantes se responsabilizan de la actividad para tratar de dar respuesta al problema, lo que implica dialogar, argumentar, tomar acuerdos sobre cómo "articular" lo que saben para llegar a una solución, poner a prueba sus estrategias y procedimientos y, junto con su docente, valoran si las decisiones que tomaron fueron convenientes y correctas.

En esta clase, el docente propone el problema con intención clara de lo que sus estudiantes requieren poner en juego para lograr cierto aprendizaje, los acompaña en ese proceso escuchándolos, cuestionando sus ideas y argumentos con el propósito de que reflexionen sobre lo que proponen y, junto con ellas y ellos valida los resultados. Una práctica docente como la descrita conlleva dos intenciones:

La primera es modificar lo que comúnmente ocurre en las aulas: las y los estudiantes tienden a preguntar a la o el docente si su razonamiento o resultado es correcto, porque creen que es quien solamente sabe y valida todas las respuestas. La segunda intención es identificar cuáles son los procedimientos más convenientes para discutir en plenaria y que a partir de la argumentación se validen o rechacen, para que posteriormente, en conjunto, docente y estudiantes, lleguen a una conclusión cercana al procedimiento formal.

Para iniciar la discusión se puede invitar a que espontáneamente cualquier equipo explique al grupo cómo llegó a la respuesta, o invitar directamente a aquellos equipos que anteriormente se identificaron con procedimientos interesantes, por ejemplo: a) los que aplicaron un procedimiento diferente, raro, distinto del resto y obtuvieron la respuesta correcta; b) los que aplicaron el procedimiento que se esperaba y obtuvieron la respuesta correcta; c) los que aplicaron el procedimiento que se esperaba pero no lograron la respuesta correcta. No se trata de exponer todos los procedimientos y resultados, sino que, a partir de la discusión de algunos, las y los estudiantes mismos puedan corregir o enriquecer razonamientos y procedimientos propios.

La recapitulación también es interpretada como la formalización de los aprendizajes y el cierre de la sesión, y se realiza con base en las conclusiones a las que lleguen niñas y niños.

La confrontación de procedimientos y resultados, que ocurre durante **la interacción entre pares** y **la puesta en común** son momentos privilegiados para ayudar a las y los estudiantes a poner en evidencia las relaciones que existen entre diferentes procedimientos, por ejemplo, las semejanzas o diferencias.

Para tener más referentes sobre estas se presenta parte del texto “Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro” desarrollado por Cecilia Parra, Irma Saiz y Patricia Sadovsky[5].

Vamos a referirnos a dos momentos importantes en las clases de matemáticas: la integración entre pares y la puesta en común, advirtiendo que:

- si se desea que los alumnos entren en un funcionamiento como el sugerido, cualquiera sea el nivel del que se trate, el docente debe prever un conjunto de actividades destinadas, justamente, a instalar en su clase nuevas “reglas del juego”. Fundamentalmente dirigidas a que los alumnos aprendan a realizar una porción mayor de trabajo independiente, a que se escuchen entre ellos, que otorguen valor a la palabra de un compañero y no sólo a la del maestro, a que aprendan a registrar su trabajo y comunicarlo, a revisar los errores y corregirlos, a sumir responsabilidades en el proceso y su evaluación. Estos objetivos pueden ser

[5] Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P. (1994). Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. Matemáticas y su enseñanza. Documento curricular P.T.F.D. En Matemática, Documento de trabajo No. 5 La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación. Argentina.

- explícitos y se puede comprometer a los alumnos en reflexiones sobre el nivel de logro que respecto de los mismos van teniendo.
- aunque en un primer momento los aspectos de funcionamiento pueden ser prioritarios, las actividades no pueden ser planteadas en el "vacío" sino que deben plantearse en torno a contenidos específicos. Desde el inicio es necesario analizar qué tipo de actividad para qué tipo de contenido, aunque sin duda, tanto la experiencia que el docente mismo vaya teniendo en conducir de otra manera sus clases, como la que vayan teniendo los alumnos, van a favorecer una articulación más afinada entre ambos aspectos. Debemos reconocer que conducir un debate en la clase es de alto desafío para el docente y tiene muchos requerimientos de formación y de conocimientos. El docente necesita conocer muy bien el contenido de referencia, tener una representación de las posibles concepciones de los alumnos y saber también a través de qué medios va a hacer evolucionar los conocimientos producidos en dirección al saber al que se apunta.

- Desde su experiencia, ¿qué necesitaría hacer para propiciar un ambiente como el descrito en el texto?

Para finalizar este capítulo se propone reflexionar sobre la siguiente pregunta:

- Para usted, ¿qué es un problema?

Registre su respuesta y posteriormente contrástela con la propuesta que hacen Parra y Saiz[6]:

Un problema (en la escuela) es la situación en la que hay algo que no se sabe, pero se puede averiguar. No se dispone de la solución, pero se cuenta con algunas herramientas para empezar a trabajar. Tiene que permitir a los alumnos imaginar y emprender algunas acciones para resolverlo.

[6] Parra, C. y Saiz I. (2008).

Capítulo 2. Orientaciones para favorecer el desarrollo de las habilidades del Campo formativo a partir del estudio de contenidos de matemáticas

Números

En esta Fase se pretende que niñas y niños avancen, por una parte, en el desarrollo de saberes iniciado en las Fases 2 y 3 respecto al conocimiento, representación y uso de los números naturales y por otra, inicien nuevos retos al conocer un conjunto de números diferentes, que tanto amplía como modifica lo que hasta ahora saben sobre los números naturales: las fracciones y los números decimales.

Conocer las características y propiedades de las fracciones y los números decimales amplía la concepción que hasta ahora tienen niñas y niños sobre los números y les facilita comprender muchas situaciones que cotidianamente enfrentan, así como otros conceptos matemáticos. A la par, desarrollan de manera más sistemática habilidades para observar, cuestionar, clasificar, medir, comparar, ordenar, analizar, relacionar, verificar, inferir, modelar, contar, formular algoritmos, registrar, entre otras.

En ese sentido, conviene propiciar que niñas y niños participen en tareas que requieran registrar, calcular, medir, contar objetos, ordenarlos o clasificarlos, con la intención de que valoren a los números como un elemento imprescindible para expresar los resultados de sus experiencias. La idea es que gradualmente representen, interpreten y comuniquen hechos y situaciones empleando el lenguaje matemático.

El dominio de los números es la base para el aprendizaje de otros contenidos. Por ello el interés será promover la construcción del **sentido numérico** (conocerlos, representarlos de diferentes formas, establecer diferentes relaciones entre ellos, usarlos para contar y resolver diferentes situaciones a través del cálculo).

La lectura, escritura y comprensión de los números naturales en esta Fase se desarrolla a través del análisis de patrones o regularidades en la sucesión numérica, de manera que se avanza en el conocimiento del **sistema de numeración decimal**.

El rango numérico considerado para tercer grado es de hasta cuatro cifras, y en cuarto grado, se amplía hasta cinco cifras. En ambos casos, para establecer el valor posicional de las cifras que componen un número es fundamental que niñas y niños consideren que un grupo de 10, 100, 1 000 o 10 000 es una unidad. En este sentido, será necesario motivar que observen que los números del 10 al 99 se escriben con dos cifras, del 100 al 999, con tres, del 1 000 al 9 999, con cuatro y los de 10 000 al 99 999 se escriben con cinco cifras. También, que todos los números que integran una decena, una centena o un millar inician con el mismo dígito (24, 25, 26, 456, 457, 458, 2 548, 2 639, 2 749), y que al contar de diez en diez, de cien en cien, o de mil en mil, la cifra que cambia es la que ocupa el lugar de las decenas (26, 36, 46), de las centenas (764, 864, 964), o de los millares (1 589, 2 589, 3 589)

Es importante considerar que decir oralmente la sucesión numérica supone iniciarla o continuarla de manera ascendente o descendente a partir de cualquier número, ya sea de uno en uno o en intervalos de 10 en 10, de 20 en 20, de 50 en 50, etcétera.

En tercer grado niñas y niños tienen su primer acercamiento formal al estudio de las fracciones, sin embargo, no les son ajenas expresiones como *kilo y medio de limones*, *un cuarto de litro de leche*, *media hora*, ya que las fracciones tienen bastantes usos en la vida diaria.

Las fracciones resultan de partir equitativa y exhaustivamente un todo, un conjunto, una unidad, y se utilizan para resolver problemas que ya no se pueden solucionar con los números naturales.

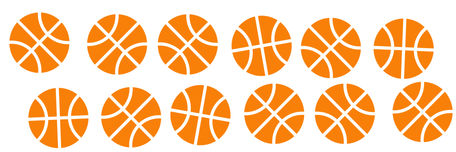
Su notación, $\frac{a}{b}$, representa la relación que existe entre **la parte y el todo**, de ahí que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no pueden ser ajenos, es decir, una fracción es un solo número. El **denominador** ($\boldsymbol{b}$) es la cantidad de partes iguales en las que se divide la unidad o el todo, y el **numerador** ($\boldsymbol{a}$) representa la cantidad de partes que se toman de esa unidad.

Las fracciones en la Educación Primaria se estudian a partir de la resolución de situaciones de **medición** y de **reparto**, en tercer grado, con fracciones que resultan de fraccionar consecutivamente un todo en dos partes iguales, (del tipo $\frac{m}{2^n}$), es decir, medios, cuartos, octavos; en cuarto grado, el repertorio se amplía con la incorporación de tercios, quintos, sextos, novenos y décimos.

Comprender las fracciones representa un gran reto para las y los estudiantes porque implica "ajustar" los conocimientos que tienen sobre la representación y funcionamiento de los números naturales. Lo que da lugar a algunas ideas erróneas como:

- al dividir o partir un “todo”, “entero” o unidad en ocho partes, se obtienen octavos, sin considerar el tamaño de las partes;
- ver cualquier fracción como dos números naturales, y no como un número compuesto por dos elementos;
- las fracciones mayores que la unidad no son fracciones ($\frac{15}{4}, \frac{12}{5}, 5\frac{1}{8}$);
- que entre mayor sea el denominador, la fracción es mayor, por ejemplo, que $\frac{2}{8}$ es mayor que $\frac{2}{4}$ porque 8 es mayor 4;
- comparar dos fracciones que no se originan del mismo “todo”, “entero” o unidad, por ejemplo, la mitad de un equipo de 12 integrantes respecto a la mitad de un equipo de 6 integrantes.

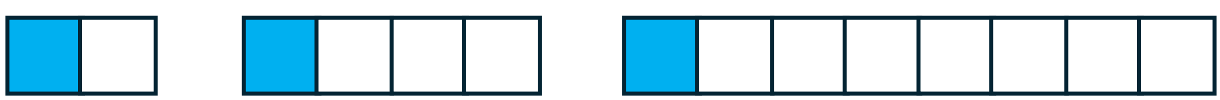
La unidad de referencia es fundamental para establecer orden entre las fracciones. Por ejemplo, en los siguientes conjuntos de pelotas, la mitad de las anaranjadas tiene un valor diferente a la mitad del conjunto de pelotas moradas:



Seis pelotas representan $\frac{1}{2}$ de 12 pelotas

Cinco pelotas son $\frac{1}{2}$ de 10 pelotas.

En muchas ocasiones se representan cuartos, medios u octavos cambiando la unidad de referencia y se pregunta a las y los estudiantes: *¿qué fracción es mayor?*



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

Como se puede observar, la unidad de referencia no es la misma, y a partir de esas representaciones, las y los estudiantes podrían concluir que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ son iguales porque el tamaño de la porción que representan en cada caso es el mismo. De ahí la importancia de cuidar que la unidad de referencia sea la misma.

Una fracción admite varias interpretaciones; por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se puede leer como “tres cuartos”; “tres partes de cuatro”; “tres de cada cuarto”; “tres veces un cuarto”.

A partir de las experiencias de partir equitativa y exhaustiva que niñas y niños tengan con el estudio de las fracciones, conviene introducir las nociones de décimo y centésimo, al proponer situaciones que requieren una partición decimal, es decir, en 10 y en 100 partes iguales respectivamente.

Las ideas que niñas y niños desarrollan sobre los números naturales evolucionan, se complementan o cambian conforme los utilizan para resolver diversas situaciones y descubren otros tipos de números como las fracciones y también, los números decimales.

Los números decimales tienen aplicaciones en diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, para expresar y calcular costos, medidas, porcentajes, hacer conversiones entre monedas, etcétera.

Es común que niñas, niños, incluso las personas mayores, crean que todos los números que tienen un punto son números decimales, sin embargo no es así. Los **números decimales representan fracciones decimales** de la unidad que se ha considerado como referencia. Por ejemplo, 0.5 metros, la unidad de referencia es el metro y expresa la medida de cinco décimas partes de un metro (que equivalen a 50 cm) por tanto, la cantidad 0.5 metros significa 50 centímetros.

Las fracciones decimales son las que se expresan con un denominador que es potencia de 10[7], por ejemplo $\frac{8}{10}$ y $\frac{5}{1000}$. También $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$ son fracciones decimales, porque se pueden generar fracciones equivalentes a un medio y a cuatro quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de 10: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$.

Las fracciones decimales tienen la particularidad de que también se pueden representar utilizando escrituras que llevan punto decimal, esto da lugar a **expresiones decimales finitas** y que, en la escuela, simplemente se le llaman decimales. Por ejemplo, a las fracciones $\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{1000}$ les corresponden, respectivamente, los números decimales 0.8 y 0.004.

Las y los estudiantes conocen y usan ciertas reglas para la escritura de números naturales, por ejemplo, saben que diez unidades equivalen a una unidad de orden mayor, y que el valor relativo de cada cifra de un número depende de su posición. Sin embargo, se requiere que algunos de los conocimientos que tienen sobre la representación y funcionamiento de los números naturales se ajusten para evitar **ideas erróneas** como:

- los números decimales son dos números separados por un punto;
- un centésimo es mayor que un décimo, y es menor que un milésimo;
- los números decimales tienen un antecesor y un sucesor;

[7] Las potencias de 10 son: 10^1 = **10**, 10^2 = **100**, 10^3 = **1000**, etcétera.

– entre dos números decimales, por ejemplo, entre 1.67 y 1.68, no existe otro número.

Regularmente al leer un número decimal se omite el nombre de la parte decimal, por ejemplo, el número 7.35 se lee incorrectamente *siete punto treinta y cinco,* lo que impide tener una idea cabal del número. También, en muchas ocasiones las y los estudiantes memorizan el nombre de cada lugar que ocupan las cifras que componen un número, sin comprender el valor que representa.

Es importante propiciar la comprensión de equivalencia entre las dos diferentes representaciones de las fracciones decimales (en la forma $\frac{a}{b}$ y con punto decimal) para continuar desarrollando el concepto y la representación de un todo y una parte de éste.

A diferencia de los números naturales, en las fracciones y en los números decimales no hay un número antecesor o sucesor.

¿Qué aspectos de los antes mencionados sobre los números naturales, las fracciones o los números decimales no los tenía presentes?

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con los números

Números naturales

- Identificar regularidades en la sucesión numérica, favorece que niñas y niños cuenten con herramientas para comparar, interpretar, producir números y anticipar resultados de algunas operaciones.

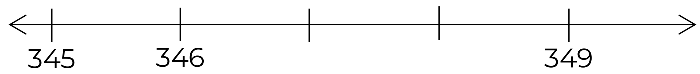
- Conviene proponer actividades como: realizar sucesiones de 10 en 10, 100 en 100 o 1 000 en 1 000, oralmente y por escrito de manera ascendente y descendente a partir de un número dado, sin perder de vista que hacerlo de forma descendente representa mayor complejidad para niñas y niños; representar un mismo número de varias formas: a partir de agrupamientos de 10, 100, 1 000 o de expresiones aditivas, por ejemplo, 1 586 = 1500 + 46 + 40; leer números escritos (5 689) y escribirlos con cifras a partir de su nombre (cinco mil seiscientos ochenta y nueve); escribir o decir el número que se encuentra antes, después o entre dos números dados; completar o continuar sucesiones numéricas ascendentes y descendentes.

- Identificar algunas diferencias entre la numeración oral y la escrita con números, ya que las reglas de la numeración oral no coinciden generalmente con las de la numeración escrita, y es común que niñas y niños piensen que los números se escriben como se dicen y hacen una correspondencia literal entre palabras y números, por ejemplo, podrían escribir “mil doscientos seis”, como 1000206, o “treinta y seis” como 306.

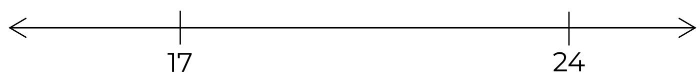
- Un error común al escribir números con letra es omitir la “s” al escribir los “cientos”: do**sc**ientos, tre**sc**ientos, sei**sc**ientos.

- Una particularidad de los números naturales es que aquellos que tienen más de tres cifras suelen separarse de tres en tres mediante un espacio o una coma, por ejemplo, el número cinco mil doscientos treinta y cuatro se escribe 5 234 o 5,234. Esto se hace con la finalidad de facilitar la lectura, de modo que a cada grupo de tres cifras se le agrega la palabra que indica el orden. Por ejemplo, el número 23 019 que corresponde al orden de las decenas de millar, se lee veintitrés mil diecinueve.

- La recta numérica es un recurso útil para trabajar las relaciones de orden y de comparación entre números. Al inicio de la Fase se pueden proponer actividades en las que se ubiquen números faltantes a partir de algunos números dados, por ejemplo:



Posteriormente, proponer actividades en las que se ubiquen algunos números, a partir de números dados en una recta en la que no se ha determinado la escala, por ejemplo, ubicar el 19, 20 y 21:



- Orientar la reflexión acerca de que en la recta numérica un número es menor que el que se ubica a su derecha porque el orden de los números se determina de izquierda a derecha, que debe mantenerse el tamaño de la unidad, es decir, la distancia entre un número y otro, y que se puede o no incluir la ubicación del cero.

Fracciones

- Introducir la noción de fracción como resultado de una medición precisa (longitud, capacidad, masa), así como de repartos equitativos y exhaustivos, en los que el "todo", el que se reparte, esté formado por un solo elemento (un pliego de papel entre cuatro niños, un pastel entre 10 personas, un chocolate entre dos niñas) o por varios elementos (tres naranjas entre cuatro niños, nueve niñas y niños en tres equipos, seis litros de jugo en cuatro envases iguales).

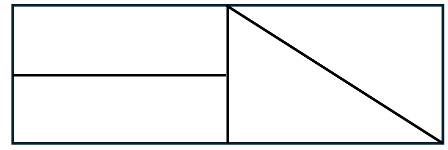
- Para obtener una fracción se deben cumplir dos principios: todas las partes resultantes deben ser iguales **(equitatividad)** y, del "todo", "entero" o unidad dividida, debe quedar nada **(exhaustividad)**.

- Trabajar prematuramente el lenguaje simbólico de las fracciones, de manera aislada, fuera de contexto o en situaciones que están fuera del alcance de las y los estudiantes, tiene como consecuencia que no logren apropiarse de los significados de estos números. Por lo que es necesario proponer diversas situaciones a través de las cuáles conozcan, representen, interpreten, escriban, comparen y ordenen fracciones, con el apoyo de materiales concretos y modelos gráficos.

- Conviene plantear tres tipos de situaciones problemáticas que impliquen identificar fracciones:

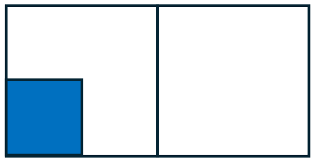
1) La figura está dividida en un número de partes distinto al que indica el denominador de la fracción:

   Sombrea $\frac{1}{2}$ de la siguiente figura.



2) Se necesitan trazos auxiliares para identificar la fracción representada:

¿Qué fracción se representa en la figura?



3) Se pide determinar la unidad a partir de una fracción:

Se sabe que el siguiente rectángulo representa $\frac{2}{3}$ de cierto entero. ¿Cómo es ese entero?

Números decimales

- Abordar los números decimales (hasta centésimos), trabajar la equivalencia entre décimos, centésimos y la unidad, es fundamental para la lectura, escritura y ordenamiento de estos números. El valor posicional juega un papel importante en la lectura adecuada del valor de cada cifra que compone un número decimal, ya que una idea errónea de niñas y niños es considerar que 0.1 es menor que 0.10, y a la vez es menor que 0.100.

- El valor de un número decimal no varía si se agregan ceros a la derecha de la última cifra, por ejemplo, 1.5 = 1.50 = 1.500 = 1.5000, de hecho, resulta una estrategia útil para establecer equivalencias. Sin embargo, contrario a lo que ocurre en los números naturales, agregar ceros a la izquierda de la cifra de mayor valor de un número decimal cambia su valor, por ejemplo, 00073 es lo mismo que 73, pero, 0.7 es mayor que 0.07.

- Entre dos números decimales siempre es posible incorporar otro, esto se conoce como la **propiedad de densidad de los decimales**. Por ejemplo, entre 4.1 y 4.2, se pueden identificar 4.12, 4.11, 4.112, 4.113, 4.124, y otros más.

- Un número decimal está integrado por dos partes, la entera y la decimal, por lo que no se trata de dos números separados por un punto, todas las cifras integran un solo número. Aclarar a niñas y niños que en algunos países los números decimales se representan con comas: 0,5.

- El valor posicional juega un papel importante en los números decimales, por ello es importante trabajar descomposiciones aditivas a partir de fracciones decimales y su escritura con punto decimal:

		Centenas	Decenas	Unidades	décimos	centésimos
$8 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$	son			8.	3	5
$37 + \frac{9}{100}$	son		3	7.	0	9
$100 + 20 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100}$	son	1	2	0.	6	4

- El número de cifras no es un recurso útil para comparar o definir el orden, por ejemplo, 4.007 se escribe con cuatro cifras y es menor que 4.5 que solo tiene dos cifras.
- Es común que niñas y niños interpreten, por ejemplo, que 1.5 m significa 1 metro con 5 centímetros, cuando en realidad es 1 metro con $\frac{5}{10}$ de metro o lo que es lo mismo, 1 metro con 50 cm. Esto también ocurre con unidades de tiempo: 1.5 horas, significa 1 hora con 30 minutos, ya que $\frac{5}{10}$ o $\frac{1}{2}$ de una hora equivalen a 30 minutos. En los dos casos (1.5 m y 1.5 h) el número decimal es el mismo, sin embargo, representan valores diferentes, por la unidad de medida.
- La recta numérica es un recurso gráfico de gran utilidad para representar particiones de las unidades en partes iguales y hacer comparaciones.

Actividades para el aprendizaje

Baraja numérica[8]

El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes. Cada jugador o jugadora necesita tarjetas recortadas como las siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

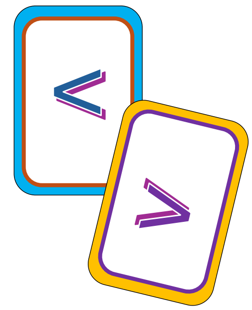
Aparte, se necesitan 10 tarjetas blancas con números de hasta cuatro cifras (incluyendo aquellos que tengan ceros intermedios) para cada equipo. Las tarjetas de cada equipo (colores y blancas) se revuelven y reúnen en el centro de la mesa, agrupadas por colores y con los números hacia abajo. Alguien del equipo toma una tarjeta blanca y la muestra al resto, después, por turnos, las y los jugadores toman una tarjeta de cada montón, con el propósito de formar el número de la tarjeta blanca con los números de las tarjetas de colores. Las tarjetas que no les sirvan se regresan al mazo correspondiente colocándolas en la parte de abajo y enseguida toma otra tarjeta de los colores que necesitan. Gana la primer persona del equipo que logra formar el número que tiene la tarjeta blanca.

Posterior al juego, se puede presentar al grupo partidas simuladas para reflexionar sobre el resultado de algunos supuestos jugadores. Es conveniente insistir en que los números pueden ser escritos con cifras o con letras y que cualquier número se puede expresar como la suma de los valores relativos de sus cifras. Por ejemplo, 3 027 puede expresarse como 3 000 + 20 + 7; hay que hacer notar que, aunque sólo son tres sumandos, se trata de un número de cuatro cifras.

[8] Adaptada de *"Baraja numérica"* en Secretaría de Educación Pública. (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado. (pp. 64-67) México.

Comparamos números[9]

El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes. Con anticipación se solicita a cada estudiante que prepare diez tarjetas con números de cuatro cifras y tres tarjetas con el signo > y tres con el signo <. Las tarjetas con números se colocan al centro de la mesa, con los números hacia abajo. Cada integrante toma tres que, con el apoyo de las tarjetas de signos, ordena conforme al criterio que en conjunto deciden: de mayor a menor o de menor a mayor. Gana un punto la o el integrante que ordene correctamente los números. Al terminar la ronda las tarjetas se regresan al mazo en la parte de abajo.



Para mediciones más exactas

En vinculación con la medición, se trata de construir un sistema de unidades de medida para medir, estimar y comparar longitudes, masas y capacidades.

Organizar al grupo en equipos para:

- Elaborar con material resistente (madera o cartón grueso) reglas de un metro, medio metro, un cuarto de metro y rotularlas: un metro, $\frac{1}{2}$ metro, $\frac{1}{4}$ de metro.
- Seleccionar y rotular recipientes que contengan un litro, $\frac{1}{4}$ de litro, $\frac{1}{2}$ de litro, $\frac{3}{4}$ de litro.
- Elaborar con aserrín, arena o piedras pequeñas, costales que midan $\frac{1}{4}$ de kilogramo, $\frac{1}{2}$ kilogramo, $\frac{3}{4}$ de kilogramo.

El material elaborado también se pueden utilizar para establecer equivalencias como: 1 metro es lo mismo que $\frac{1}{2}$ metro + $\frac{1}{2}$ metro; $\frac{1}{2}$ litro es igual que $\frac{1}{4}$ de litro + $\frac{1}{4}$ de litro; y $\frac{1}{4}$ de kilogramo + $\frac{3}{4}$ de kilogramo son lo mismo que un kilogramo.

Repartos equitativos y exhaustivos

Realizar repartos de un elemento o de un conjunto de ellos usando material concreto o doblando y recortando figuras, en los que, los resultados sean menores o mayores que la unidad. Por ejemplo, un chocolate entre 4 personas y 5 chocolates entre 4 personas. Antes de llevar a cabo el reparto, pedir a niñas y niños que estimen si el resultado será mayor o menor que uno y posteriormente comprobar su anticipación. Finalmente, escribir el resultado con fracciones. Considerar que una misma cantidad se puede representar de distintas formas: "A cada niño le tocó $\frac{1}{2}$ chocolate + $\frac{1}{4}$ de

[9] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2014). (pp. 64-67)

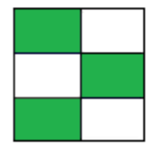
chocolate" o "A cada niño le tocó $\frac{3}{4}$ de chocolate" y aprovechar esta condición para comenzar un repertorio de equivalencias básicas.

Identificación o representación de fracciones

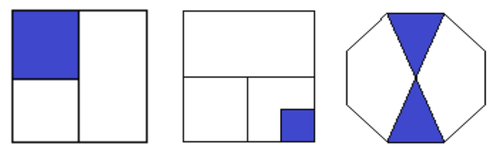
Proponer situaciones en las que se identifique la fracción representada o represente la fracción que se solicita:

- Si se trata de identificar una fracción:

  a) La figura se presenta dividida y se observa directamente la fracción que se pide identificar.

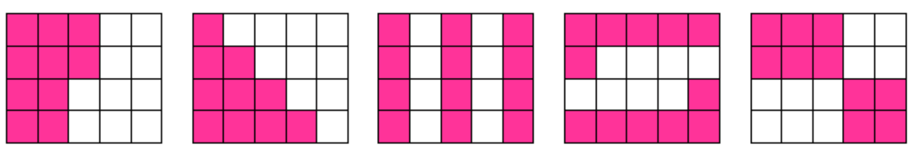


  b) La figura se presenta parcialmente dividida y es necesario hacer algunos trazos para identificar la fracción señalada.

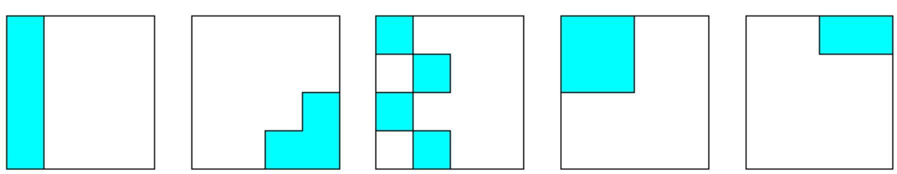


  c) Se presentan diferentes figuras y se pide identificar las que representan una fracción en particular.

  ¿En cuáles de estas figuras el color rosa representa $\frac{1}{2}$?



  ¿En cuáles de estas figuras el color azul representa $\frac{1}{4}$?



- Si se trata de representar una fracción:

a) Con material concreto.

Construcción de un fraccionómetro. Se requieren cinco hojas de colores diferentes. A partir de doblar y recortar cada vez a la mitad cada fracción, una se divide en medios, otra en cuartos, la tercera en octavos, la cuarta en dieciseisavos, y la última, de color blanco, representará la unidad. Con este material se solicita a las y los estudiantes que cubran cierta parte de la unidad utilizando diferentes fracciones, y lo expresen simbólicamente.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}=\frac{3}{4}$$

También se puede solicitar que representen una fracción mayor o menor a otra dada y que expresen esa comparación simbólicamente.

b) Se presenta una figura dividida en un número de partes distinto al que indica el denominador de la fracción.

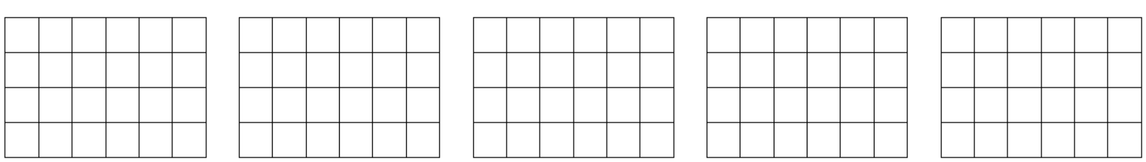
Sombrea $\frac{1}{4}$ de esta figura.

c) Se pide construir una figura a partir de una fracción dada.

Se sabe que este rectángulo representa $\frac{1}{8}$ de una figura. ¿Cómo es esa figura?

d) Se pide colorear de diferentes formas una fracción de la misma figura.

Colorea de cinco formas diferentes $\frac{6}{8}$ del rectángulo.



Comparación de décimos y centésimos

- Actividades que impliquen representar y ordenar décimos y centésimos con recursos gráficos:

  a) Con apoyo de un rectángulo dividido en cien partes iguales, solicitar que se representen cierta cantidad de décimos y centésimos. Motivar la reflexión con preguntas como: ¿cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?, ¿qué parte de un décimo es un centésimo?, ¿cuántos centésimos son seis décimos?

  b) Con apoyo de tablas, identificar cuál número es mayor o menor y motivar la reflexión con preguntas como, ¿por qué es mayor 0.5 que 0.49?

Número	Parte entera		décimos	centésimos	Nombre con letra
0.5	0	.	5	0	Cinco décimos / cincuenta centésimos
0.49	0	.	4	9	Cuarenta y nueve centésimos

Tripas de gato

Se trata de relacionar números decimales con su notación como fracción, por ejemplo, 16. 08 con 16 + $\frac{8}{100}$ o 23.59 con 20 + 3 + $\frac{5}{10}$ + $\frac{9}{100}$. Los números se escriben en el pizarrón, y con líneas de colores se establecen las parejas, el reto es que las líneas no se toquen o crucen. Es importante que cada vez que se forme una pareja se analice grupalmente.

¿Quién tiene la explicación?

Consiste en plantear preguntas relacionadas con la comparación de fracciones o de fracciones con números decimales. Además de acertar la respuesta, se pretende que las y los estudiantes, individualmente o en parejas la argumenten.

Se pueden plantear preguntas como:

- ¿Qué tira será más larga, la que mide $\frac{5}{4}$ metros o la que mide $\frac{7}{4}$ metros?
- Vanesa recibe $\frac{3}{4}$ de barra de chocolate y Diego recibe $\frac{3}{8}$ de barra. ¿A quién le tocó mayor cantidad de chocolate?
- Las piñas pesan 1 kg y $\frac{4}{10}$ de kg, ¿esto es más o menos que 1.5 kg?

Seleccione una actividad para el aprendizaje sobre números naturales y otra de fracciones o números decimales. ¿Qué adecuaciones les haría para desarrollarlas con su grupo?

Suma y resta, y su relación como operaciones inversas

Estudiar las operaciones es algo más que dominar procedimientos, implica comprender cómo se relacionan entre sí y las situaciones problemáticas que se resuelven con ellas.

Desde la Fase 3, niñas y niños construyen las nociones de suma y resta a partir de experimentar con situaciones problemáticas que implican juntar, quitar, agregar, comparar y completar colecciones, mediante la manipulación de objetos, o con representaciones gráficas, con la idea de que reconozcan que la suma y la resta son operaciones inversas. Estas dos operaciones son la base para muchos conceptos matemáticos y tienen gran importancia para resolver una variedad de problemas en distintos contextos de la vida cotidiana.

En esta Fase, se pretende, por un lado, que niñas y niños resuelvan problemas de suma y resta que impliquen poner en juego su relación inversa con el uso de números naturales de hasta cuatro cifras, fracciones (medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, décimos) y decimales hasta centésimos, y por otro, que se apropien de los algoritmos convencionales con los números naturales de hasta cuatro cifras, además de favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con el cálculo mental.

Hay diferentes tipos de problemas que se resuelven con una suma o una resta. Los más comunes son los que requieren: agregar una cantidad a otra, juntar dos o más cantidades, igualar cantidades, quitar una cantidad a otra, completar una cantidad dada, o en los que se desconoce la cantidad inicial antes de quitarle o agregarle algo.

Las dificultades más comunes que tienen niñas y niños en la resolución de problemas de suma y resta son: a) en comprender el problema, b) en identificar si el problema requiere suma o resta, c) en los cálculos. Resolver problemas con frecuencia en parejas o grupos pequeños y discutir grupalmente los procedimientos utilizados para resolverlos, favorece que paulatinamente las y los estudiantes superen esas dificultades.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la suma y la resta, y su relación como operaciones inversas

- Las y los estudiantes tienen conocimientos para resolver un problema aún antes de conocer la operación que lo puede resolver. Si se limita el uso de procedimientos propios en espera de una operación en particular, se resta confianza en sus propios recursos y se les obliga a tratar de "adivinar" la manera correcta para solucionarlo.

- Contemplar en la enseñanza dos aspectos: por un lado, los procesos que llevan a la construcción de los diferentes algoritmos de cada operación y, por otro, los distintos significados a los que pueden asociarse en los problemas que resuelven. Se sugiere abordar ambos aspectos a la vez, ya que los procedimientos que los alumnos ponen en juego frente a un problema están ligados a la interpretación que ellos hacen de la situación.

- Propiciar que niñas y niños discutan, tomen decisiones y comprueben sus ideas acerca de cuál o cuáles son las operaciones que posibilitan la resolución de una situación problemática y comprendan que la suma y la resta son operaciones inversas, así como lo son la multiplicación y la división.

- Es importante que en la resolución de problemas, el trabajo con niñas y niños se centre en:

  - Plantear problemas interesantes y que impliquen un desafío intelectual.
  - Crear un ambiente positivo de intercambio de ideas, de procedimientos y de resultados.
  - Generar estrategias de descomposición de números en unidades más sencillas.
  - Valorar que, frente a un determinado cálculo, pueden existir distintos caminos que lo resuelven, pero que en muchos casos unos son más adecuados que otros, dependiendo de la relación que exista entre los números.

  La idea es que las y los estudiantes cuenten con herramientas para explicar sus procedimientos, ya que explicar a otros lo que hicieron para resolver un problema resulta vital para avanzar en la construcción de su propio conocimiento, puesto que los argumentos necesarios para convencer a otros, por lo general, tienen que ser más precisos que los que se necesitan para convencerse a uno mismo.

- En esta Fase se profundiza en el estudio de la suma y la resta al operar números naturales, fracciones y números decimales hasta centésimos, lo que implica reflexionar sobre el valor posicional y la equivalencia.

- El material concreto o gráfico sigue siendo un recurso importante para plantear problemas, visualizar la relación entre los datos o para resolverlos, en particular los que implican fracciones y números decimales. En la medida en que las y los estudiantes se apropian de las técnicas, dejarán de lado el material.

- El tipo de números involucrados y el lugar de la incógnita en una operación son elementos que, al resolver un problema, cambian su nivel de dificultad. En este sentido, son de mayor complejidad, por ejemplo, los problemas que se resuelven con operaciones como 45 – ___ = 22, ___ + 123 =150, en comparación con los que se resuelven con operaciones como 24 + 32 = ____ o 156 – 28 = ____. Por lo que, proponer actividades que resalten la idea de que la suma y la resta son operaciones inversas, favorece la resolución de esas operaciones.

- Trabajar los algoritmos convencionales a partir de agrupamientos decimales. En el caso de la suma, conviene partir de la escritura horizontal a la escritura en columnas y analizar qué ocurre si los números no se acomodan correctamente. Para la resta, es importante presentar el algoritmo convencional y resolverlo simultáneamente con material concreto, de esta manera, las y los estudiantes observan que es necesario cambiar una decena por diez unidades, o una centena por diez decenas.

- Iniciar con sumas y restas de fracciones con el mismo denominador y paulatinamente incorporar fracciones con distintos denominadores en las que un denominador es múltiplo del otro, para resaltar la ventaja de determinar fracciones equivalentes.

- Una de las confusiones más comunes de niñas y niños al sumar o restar fracciones es operar los numeradores y los denominadores de forma independiente; lo cual se relaciona con la idea errónea de que una fracción se compone de dos números.

- Es necesario enfrentar a las y los estudiantes a situaciones donde los números decimales tengan diferente número de cifras decimales, ya que, si todos los números tienen igual número de cifras decimales, difícilmente reconocerán que, por ejemplo, 3.5 es mayor que 3.18

- El uso de la calculadora para verificar resultados favorece el desarrollo de estrategias de cálculo y la ampliación del conocimiento de las operaciones.

- El cálculo mental constituye un recurso importante para estimar o controlar los resultados. Es importante impulsar estrategias como utilizar resultados memorizados que facilitan seguir los pasos del algoritmo, por ejemplo 10 – 1, 100 – 10, 1 000 – 100.

- Muchas situaciones pueden ser resueltas con facilidad si se conocen distintas representaciones de los números y las niñas y los niños pueden utilizarlas según la situación que se pretenda resolver.

- Es importante propiciar que las y los estudiantes amplíen su noción respecto al signo igual (=), ya que puede indicar un resultado, como en el cao de:

26 + 8 = 34	veintiséis más ocho es igual a treinta y cuatro

y también, puede indicar una equivalencia: como en el caso de las expresiones aditivas:

36 + 2 = 20 + 18	treinta y seis más dos representa el mismo número que veinte más dieciocho

Estos conceptos son fundamentales para comprender en grados posteriores ciertas propiedades numéricas y algebraicas.

- Una vez que niñas y niños se han enfrentado a una serie de problemas que se resuelven con una sola operación, es conveniente plantearles problemas que requieren más de una operación.

Describa brevemente cómo puede aprovechar los aspectos descritos hasta ahora para la planificación de sus clases.

Actividades para el aprendizaje

Portadores

Se trata de que las y los estudiantes resuelvan o propongan problemas que impliquen efectuar sumas o restas con números naturales a partir de la información contenida en un portador (carteles, revistas, folletos, volantes o tablas).

Situaciones que se resuelven con una o más operaciones

- Jacinta y Fernando quieren comprar un juguete con lo que logren ahorrar en un mes. Jacinta ahorró $ 18 y Fernando $ 22. ¿Cuánto dinero ahorraron entre los dos?
- En un juego, David ganó 18 estampas y volvió a su casa con 43 estampas. ¿Cuántas estampas tenía al empezar a jugar?
- Para ir a un espectáculo de teatro, la escuela consiguió 150 boletos para los alumnos de tercer grado y algunos invitados. De 3° “A” fueron 37 estudiantes, de 3° “B” fueron 35 y de 3° “C” fueron 44. ¿Cuántos boletos quedaron disponibles para los invitados?

¿Cuál es la operación?

Se propone un problema y varias sumas y restas, entre ellas, las operaciones que se requieren para resolverlo; la intención es identificar la relación de los datos y la incógnita a resolver así como la operación u operaciones que la representan. Por ejemplo:

En la escuela nos organizamos para reparar y pintar nuestras sillas. Hoy logramos terminar 92 y todavía nos faltan reparar 67. ¿Con cuál operación podemos calcular cuántas sillas eran en total?

$$\begin{array}{r} 92 \\ -\ 67 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ +\ 92 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ -\ 92 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 92 \\ +\ 67 \\ \hline \end{array}$$

En un centro de acopio para damnificados, el primer día se reunieron 480 botellas de agua, el segundo día solo se reunieron 243, pero el tercer día, con la donación de una persona se juntaron 1 500 botellas. ¿Con cuáles operaciones se puede calcular cuántas botellas donó esa persona el tercer día?

$$\begin{array}{r} 480 \\ -\ 243 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 480 \\ +\ 243 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,500 \\ -\ 723 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,500 \\ +\ 237 \\ \hline \end{array}$$

Es conveniente que en plenaria se comenten las respuestas de las y los estudiantes, ya que al contrastar sus estrategias y procedimientos pueden aplicar alguno diferente que les parezca más pertinente al resolver el siguiente.

Estimaciones

- Situaciones que implican argumentar el resultado de una suma o de una resta. Por ejemplo:

    Paco y Ana estiman el resultado de la resta: 1 807 – 1 395. ¿Quién tiene la razón? ¿Por qué?

- Situaciones que implican determinar si un resultado es mayor o menor que el número dado.

    Sin hacer el cálculo exacto, responde:

    a) El resultado de 435 + 285, ¿será mayor o menor que 700?

    b) El resultado de 567 – 203, ¿será mayor o menor que 300?

- Situaciones que implican determinar entre varios resultados, cuál es el más cercano al correcto.

    Identifica cuál de los tres números es más cercano al resultado de la operación. Después comenta cómo lo supiste:

235 + 185 =	630	310	430

375 – 175 =	400	210	180

375 + 425 =	700	820	890

475 – 125 =	250	300	340

Regularidades

El grupo se organiza en parejas y se les propone que observen familias de sumas o restas para que identifiquen algunas regularidades. Por ejemplo:

- Explicar qué ocurre entre los números que se operan y los resultados, y proponer dos ejemplos en los que se observe la misma relación.

17 – 9 = 8
27 – 9 = 18
37 – 9 = 28
47 – 9 = 38
57 – 9 = 48

17 + 9 = 26
27 + 9 = 36
37 + 9 = 46
47 + 9 = 56
57 + 9 = 66

- Completar la tabla y explicar cómo se resolvió.

Sumas que su resultado es 10	Sumas que su resultado es 100	Sumas que su resultado es 1 000
9 + 1 = 10	90 + 10 = 100	900 + 100 = 1 000
8 + 2 = 10	80 + 20 = 100	800 + 200 = 1 000
7 + 3 = 10		
6 + 4 = 10		
5 + 5 = 10		
4 + 6 = 10		
3 + 7 = 10		
2 + 8 = 10		
1 + 9 = 10		

Sumas que ayudan a restar

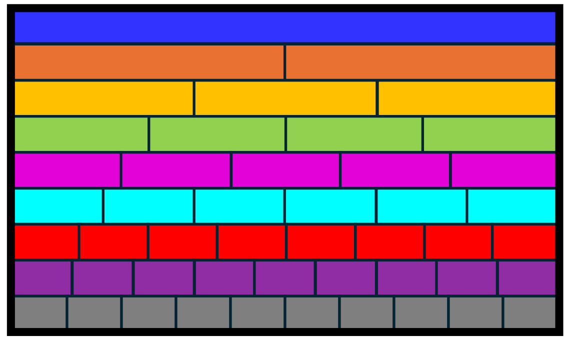
El grupo se organiza en parejas. Se trata de que las y los estudiantes con los números de una suma escriban las dos restas que son posibles obtener:

385 + 402 = 787, entonces 787 – _____ = 402

y 787 – 402 = ______

Con fracciones diferentes

El grupo se organiza en equipos de tres o cuatro integrantes. Cada equipo necesita un fraccionómetro de las fracciones que ha estudiado. Se pide a los equipos que con fracciones de dos, tres o cuatro tipos, forme diferentes números, y los representen con una expresión aditiva, por ejemplo:

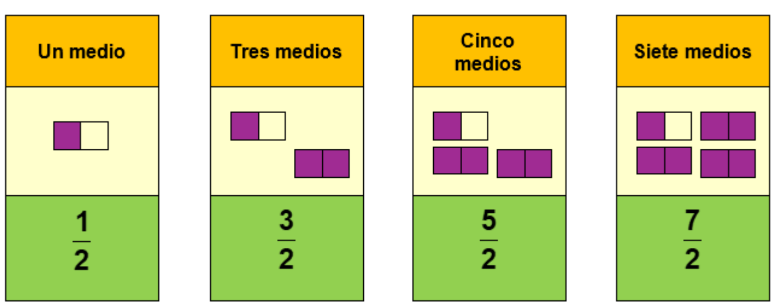


$$\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}=2$$

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{10}+\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=2$$

¿Me sobra o me falta?[10]

Se trata de realizar sumas o restas con fracciones y representarlas en tres niveles: escrita, gráfica y numérica en tarjetas como las que se muestran. El grupo se organiza en equipos de dos o tres integrantes. Las cuatro tarjetas de las y los jugadores se juntan, revuelven y colocan al centro de la mesa. Cada integrante toma dos tarjetas y, después de observarlas, decide si quiere una más, de manera que no tenga más de tres. Gana el integrante que sumando o restando los valores de sus tarjetas obtenga $\frac{9}{2}$. o, el que más se aproxime a ese resultado y justifique su respuesta. Por cada ronda ganada se obtiene un punto; después de seis rondas, gana quien acumule más puntos.



[10] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2014). (pp. 224-225)

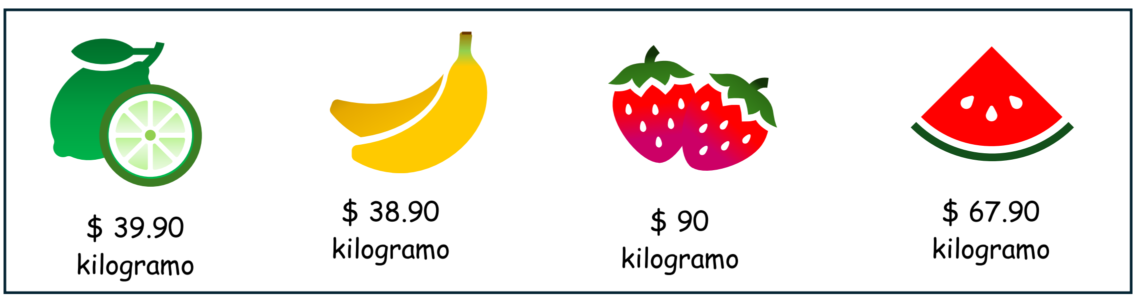
Para uno, ¿sobra o falta?[11]

La idea es que las y los estudiantes desarrollen habilidades para calcular mentalmente la fracción que sobra o falta, para que el resultado sea uno. El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes. Cada equipo necesita un juego de 20 tarjetas con fracciones de ambos lados, de manera que, al sumarse o restarse el resultado sea uno. Por ejemplo, si un lado dice $\frac{3}{5}$, el otro lado podría tener $\frac{2}{5}$, porque $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$ o podría tener $\frac{8}{5}$ porque $\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$. Es conveniente utilizar dos colores diferentes para anotar las fracciones.

Las tarjetas se revuelven y colocan una sobre otra con el mismo color hacia arriba. Por turnos, cada persona lee la fracción que tiene a la vista y dice qué fracción se debe sumar o restar para que el resultado sea uno. Para verificar su respuesta, voltea la tarjeta. Si acertó se queda con ella; si no, la coloca debajo de las demás. El juego termina cuando se acaban las tarjetas. Gana quien obtenga más tarjetas.

Fuimos al mercado

Con apoyo de un portador o bien, con imágenes u objetos, se motiva a las y los estudiantes a realizar cálculos acerca de cuánto gastarían al comprar diversos productos o alimentos. Por ejemplo:



1. Esteban compró un kilo de limones y un kilo de plátanos. ¿Cuánto dinero gastó?
2. Alonso paga con un billete de $ 100 por un kilo de plátanos. ¿Cuánto le dan de cambio?
3. Laura gastó $ 286.80 en frutas. Compró dos kilos de fresas, un kilo de sandía y un kilo de otra fruta:

[11] Tomado de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto Grado. (Ficha 31). México.

- ¿Qué otra fruta compró?
- Si pagó con un billete de $ 500, ¿cuánto dinero le quedó?

4. Alicia llevaba un billete de $ 100, dos billetes de $ 50 y un billete de $ 20. Compró 3 kilos de limones y dos kilogramos de plátano. ¿Cuánto dinero le quedó?

Incluir modelos de billetes y monedas cuyo valor corresponde a centavos, favorecería que las y los estudiantes practicaran agrupamientos decimales.

¿Cuál de las actividades de aprendizaje descritas le parece pertinente para poner en práctica con sus estudiantes? ¿Por qué?

Multiplicación y división, y su relación como operaciones inversas

En la Fase anterior, las y los estudiantes de segundo grado iniciaron el estudio de la multiplicación y la división a partir de la resolución de problemas que involucran sumas iteradas, arreglos rectangulares, repartos o agrupamientos mediante diversos procedimientos (gráficos, conteo, sumas o restas iteradas), con el propósito de favorecer la construcción del concepto de multiplicación y división y su relación como operaciones inversas. En esta Fase se continúa avanzando en la comprensión de los problemas que se resuelven con estas operaciones, además de que se analizan procedimientos para hacerlas.

Hay diferentes tipos de problemas que se pueden resolver con una multiplicación o con una división, los más comunes, y que se recomienda proponer en esta Fase, son aquellos en los que **una cantidad se repite varias veces**, los que implican un **reparto equitativo**, los que requieren saber cuántas veces cabe una cantidad en otra **(agrupamiento)**.

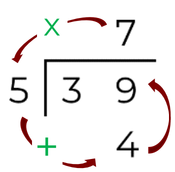
Es importante resaltar la necesidad de que en la primera etapa de la Fase se logre el dominio de un repertorio de multiplicaciones de números de una cifra (tablas de multiplicar), y para ello el trabajo debe transitar de la comprensión a la memorización.

El uso de material concreto y gráfico sigue siendo un recurso fundamental para trabajar las nociones de multiplicación y división en esta Fase.

Con relación a la multiplicación, se espera que al finalizar el tercer grado, las y los estudiantes logren resolver multiplicaciones con resultados de hasta tres cifras mediante diversos procedimientos, como la suma de multiplicaciones parciales o multiplicaciones por 10, 20, 30, y al término de cuarto grado, conozcan y usen el algoritmo convencional para multiplicar números de tres cifras por números de dos cifras.

Niñas y niños pueden resolver problemas que implican el uso de una división, antes de conocerla formalmente, por ejemplo, repartiendo, contando o con sumas y restas iteradas. Un paso importante en el proceso de aprender a dividir es hacer multiplicaciones para encontrar el cociente.

Cuando las y los estudiantes resuelven una operación como 72 ÷ 8 = _____, a partir de buscar el número que multiplicado por 8 da 72, han comenzado a concebir la división como una multiplicación inversa. De esta forma, al plantear problemas sencillos de división, se propicia que las y los estudiantes afirmen sus conocimientos sobre la multiplicación, a la vez que comprenden su relación como operación inversa de la división y viceversa.



Respecto al estudio de la división, se espera que las y los estudiantes de tercer grado utilicen la multiplicación para resolver divisiones de números de dos cifras entre un número de una cifra y usen la expresión $a \div b = c$ para representarlas y resolverlas. Y, que las y los estudiantes de cuarto grado, conozcan y utilicen un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras, además que reconozcan que tanto el cociente como el residuo son resultados de una división.

Los problemas que implican una división no siempre se resuelven de modo que el conjunto que se reparte o se agrupa se agota, por lo que la cantidad de objetos que quedan también deben considerarse como uno de los dos resultados de esa operación, el residuo. Esa cantidad debe ser menor que el divisor, pues de lo contrario se entiende que aún es posible formar más grupos o seguir repartiendo.

En este sentido, es importante propiciar que las y los estudiantes observen y comprendan la relación que existe entre los elementos de la división:

El cociente (C) multiplicado por el divisor (d), más el residuo (r), da como resultado el dividendo (D): $D = C \times d + r$

Al igual que con la suma y la resta, la estimación de resultados y el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones son habilidades que se deben practicar permanentemente para favorecer que niñas y niños distingan resultados factibles.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades vinculadas con la multiplicación y la división, y su relación como operaciones inversas

- Propiciar que niñas y niños discutan, tomen decisiones y comprueben sus ideas acerca de cuál o cuáles son las operaciones que posibilitan la resolución de una situación problemática. Ello favorecerá que comprendan que la multiplicación y división son operaciones inversas.

- Considerar en la enseñanza dos aspectos: por un lado, los procesos que llevan a la construcción de los diferentes algoritmos de cada operación y, por otro, los distintos significados a los que pueden asociarse en los problemas que resuelven. Se sugiere abordar ambos aspectos a la vez, ya que los procedimientos que niñas y niños ponen en juego frente a un problema están ligados a la interpretación que ellos hacen de la situación.

- Niñas y niños suelen tener dificultad con los problemas de multiplicación, los confunden con los de suma porque están familiarizados con ellos. Por ello, es posible que ante la pregunta: ¿Cuántos libros tengo si en cada una de las 3 cajas guardé 5 libros?, la mayoría de estudiantes responda que tengo 8 libros (3 + 5 = 8).

- Cuando se trabaja un tipo de problema nuevo, con frecuencia es necesario desarrollar recursos informales a través del ensayo y error, antes de encontrar una forma sistemática de resolverlo.

- Generalmente, se dice que una multiplicación es una suma abreviada, sin embargo, esta expresión no es correcta, es más conveniente propiciar que niñas y niños identifiquen que uno de los significados de la multiplicación es representar situaciones en la que una cantidad se repite varias veces.

- Propiciar que niñas y niños, a través de situaciones lúdicas, construyan y usen un repertorio multiplicativo de factores de una cifra (tablas de multiplicar) para resolver multiplicaciones y divisiones. Se recomienda el siguiente orden: 1, 10, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 9, 7. Conviene paulatinamente construir grupalmente el cuadro de multiplicaciones con los resultados que se van memorizando.

- Identificar en el cuadro de multiplicaciones relaciones entre los resultados, por ejemplo: los resultados de las multiplicaciones del 4 son dobles de los resultados de las multiplicaciones del 2 y, son mitades de los resultados de la tabla del 8; los resultados de las multiplicaciones del 7 coinciden con la suma de los resultados de las multiplicaciones del 5 más los resultados de las multiplicaciones del 2; hay resultados que se repiten, por ejemplo el resultado de multiplicar 5 por 9 y el resultado de multiplicar 9 por 5.

- Iniciar el trabajo con la división a partir de situaciones que implican repartir y determinar cuántas veces cabe una cantidad en otra, con apoyo de materiales concretos y gráficos, o con el uso de sumas, restas o multiplicaciones.
- Resaltar las relaciones que hay entre el dividendo, el cociente, el divisor y el residuo y el uso de estas relaciones para verificar que los cálculos son correctos.
- Proponer multiplicaciones de un número por múltiplos de 10 y comentar alguna estrategia para resumir el proceso.
- Propiciar que niñas y niños usen, expliquen y comprueben sus estrategias para calcular mentalmente los productos de números de una cifra o, el doble o el triple de un número de dos cifras y la mitad de un número par de dos cifras.
- El uso de la calculadora para verificar resultados favorece el desarrollo de estrategias de cálculo y la ampliación del conocimiento de las operaciones.

Actividades para el aprendizaje

En la tlapalería

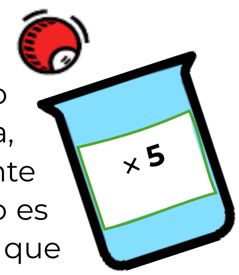
El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes. A cada equipo se le da una tapa, piedritas, fichas, botones o cualquier material pequeño para contar, un juego de tarjetas numeradas de 1 a 10, y un dado de puntos. Se indica que empaquetarán tornillos y las tapas serán las bolsas donde colocarán esos materiales; las tarjetas se revuelven y colocan con los números hacia abajo en el centro de la mesa. Un integrante toma una tarjeta para saber cuántos tornillos debe colocar en cada bolsa, y tira el dado para saber cuántas bolsas debe llenar, entonces, debe decir la cantidad aproximada de tornillos que necesita, y lo comprueba usando las piedritas, fichas o botones y las tapas. Si el número que menciona es correcto o muy cercano al correcto, la persona gana dos puntos. Gana la o el estudiante que después de cinco rondas tenga más puntos.

El boliche

El grupo se divide en equipos de cuatro o cinco integrantes. Cada equipo cuenta con una calculadora, una pelota y 10 bolos de diferente color, por ejemplo: verde, blanco, amarillo y anaranjado. A cada bolo se le asigna un valor, que puede ser entre 2 y 20. El juego se realiza en dos etapas. En la primera, por turnos las y los jugadores tiran una vez la pelota y una persona del equipo se encarga de registrar los puntos que sus compañeras y compañeros acumulan con los bolos que derriban. Gana la persona que logre más puntos.

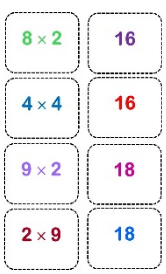
En la segunda etapa, los colores de los bolos van a indicar el número de veces que se multiplica su valor, por ejemplo, si es verde el valor se multiplica 3 veces, si es amarillo el valor aumenta al doble, si es anaranjado el valor se multiplica por 5, y si es blanco, por 8. Los valores de los colores se registran en una tabla a la vista de todos los equipos. Por turnos las y los jugadores tiran una vez la pelota, mientras una persona se encarga de registrar los puntos que se acumulan por los bolos derribados. Gana el equipo que, después de revisar los registros, acumula más puntos.

Atínale al bote



El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes, que a su vez se divide en parejas. Cada equipo cuenta con un bote y ocho pelotas numeradas. Cada equipo asigna un valor numérico al bote. El juego consiste en que uno de los integrantes de la pareja lance una a una, cuatro pelotas intentando meterlas en el bote que el otro integrante detiene. Los valores de la pelota y del bote se multiplican, el resultado es el número de puntos que la pareja consigue en cada tiro. La pareja que consigue mayor puntuación es la que gana.

Memorama de multiplicaciones y Cuadro de multiplicaciones[12]



El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes y a cada uno se les entregan dos juegos de tarjetas, uno con multiplicaciones y otro con los resultados. Es conveniente ir agregando más tarjetas, a medida que niñas y niños logran memorizar los productos. Las tarjetas que tienen multiplicaciones se revuelven y colocan una sobre otra con las operaciones hacia abajo. Las tarjetas con resultados se colocan a la vista. El jugadora o jugador que inicia el juego toma una tarjeta de multiplicaciones, lee la multiplicación e inmediatamente toma el resultado que le corresponde. Si acierta, se queda con las dos tarjetas, si no, las devuelve. Gana la persona que al final del juego logró obtener más tarjetas.

Después de varias veces de realizar el juego, se pide a las y los estudiantes que individualmente registren en el cuadro de multiplicaciones (Tabla Pitagórica), los resultados que vayan memorizando, a la vez que grupalmente se completa uno con los resultados que vayan mencionando. Cuando el cuadro esté lleno, se proponen situaciones como preguntar aleatoriamente por algunos resultados que se hayan cubierto o, decir un número e identificar todas las multiplicaciones que dan como resultado ese número.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

[12] Tomado de Secretaría de Educación Pública. (2014) (pp.24-26).

Un resultado, varias multiplicaciones[13]

El grupo se puede organizar en parejas o equipos de tres integrantes y se pide que registren en la tabla todas las multiplicaciones que den como resultado el número de la primer columna. Si algún equipo lo requiere, se puede apoyar con el Cuadro de multiplicaciones. Para finalizar se revisa grupalmente las tablas de los equipos y se pide que registren aquellas multiplicaciones que les hicieron falta.

Resultados	Multiplicaciones
4	
12	
20	5 x 4; 4 x 5; 2 x 10; 10 x 2, 20 x 1, 1 x 20
24	
35	
48	

Descomposición de números[14]

El grupo se organiza en equipos de cuatro o cinco integrantes. Cada equipo necesita 20 tarjetas con números de dos cifras. Las tarjetas se revuelven y colocan una sobre otra al centro de la mesa. Por turnos, las y los jugadores toman una tarjeta y la muestra al resto del equipo para que cada integrante escriba una multiplicación que dé como resultado ese número o un número que sea lo más cercano posible. Si este es el caso, también debe anotar el resto, que debe ser menor que cualquiera de los factores. Después de revisar todas las respuestas, gana un punto la persona que haya acertado. Si fuera necesario se puede dar un ejemplo al grupo:

La tarjeta que saqué tiene el número 58, entonces las respuestas que se podrían escribir son:

7 x 8 = 56 y faltan 2, 8 x 7 = 56 y faltan 2, 5 x 11 = 55 y falta 1 u 11 x 5 = 55 y falta 1

[13] Tomado de Secretaría de Educación Pública. (2014) (pp.30-31).
[14] Tomado de Secretaría de Educación Pública. (2014) (pp.238-240).

Otros tipos de problemas

- **De reparto equitativo**

Son los problemas en los que se reparte una cantidad para conformar varios conjuntos con la misma cantidad de elementos:

- Para iniciar un juego de pirinola cada persona debe tener fichas. Si se reparten 45 fichas equitativamente a los 5 jugadores, ¿cuántas fichas tendrá cada uno al iniciar el juego?
- Seis amigas desean repartir entre ellas 12 gelatinas de manera que les toque la misma cantidad. ¿Cuántas gelatinas le corresponde a cada una?

- **De agrupamiento**

Son aquellos en los que se trata de ver cuántas veces cabe una cantidad en otra:

- Matías tiene que guardar en cajitas 72 botellas de agua. ¿Cuántas cajas necesitará si en cada caja caben 6 botellas?
- Si tengo $ 85 y gasto $ 8 por día, ¿para cuántos días me alcanza?
- Fernando hace figuras de chocolate y las vende en bolsitas de 6 figuras cada una. El fin de semana hizo 94 figuras, ¿para cuántas bolsitas le alcanzaron?, ¿sobraron figuritas?

- **En los que se itera una cantidad**

Son los problemas en los que una cantidad se repite varias veces:

- En la florería de Lorena se hicieron 14 ramos con 9 rosas cada uno. ¿Cuántas rosas ocuparon en total?
- Cuando fuimos al museo, las maestras contrataron siete camiones, y en cada uno viajamos 42 personas, entonces, ¿cuántas personas fuimos al museo?

Invento problemas

Organizados en parejas, las y los estudiantes inventan un problema que se pueda resolver con las operaciones que se presenten, como las que se muestran a continuación. Posteriormente los problemas se revisan y validan gripalmente:

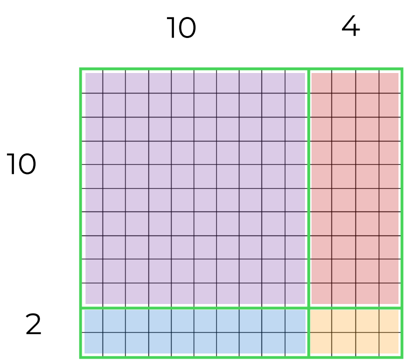
$18 + 6$	18×6	$18 \div 6$

Vinculación de una representación gráfica con el algoritmo convencional[15]

Este trabajo es crucial para llegar al algoritmo convencional, puesto que se trata de relacionar una representación gráfica con la operación de multiplicar y para ello se recurre a la descomposición de los factores.

¿Cuál es el resultado de 14×12?

Cada factor se descompone decimalmente, de modo que se obtiene, por un lado $10 + 4$, y por otro, $10 + 2$, y la multiplicación se representa: $(10 + 4) \times (10 + 2)$, y gráficamente con una cuadrícula, de modo que las y los estudiantes pueden observar que en una multiplicación de dos números con dos cifras cada uno, hay que calcular cuatro productos parciales y luego sumarlos para encontrar el producto total:



Se calculan los cuatro productos parciales que resultan de multiplicar cada cifra del multiplicador por cada cifra del multiplicando, tomando en cuenta sus valores relativos. En este caso, la operación se resuelve de la siguiente manera:

		14
		X 12
2×4	→	8
2×10	→	20
10×4	→	+ 40
10×10	→	100
		168

Revise nuevamente la actividad "Vinculación de una representación gráfica con el algoritmo convencional". Siguiendo el mismo procedimiento, resuelva las multiplicaciones 29×19 y 47×12.

[15] Adaptada de Secretaría de Educación Pública. (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado. (pp. 173-179) México.

Cuerpos y figuras geométricas

El estudio de la geometría en la educación básica tiene un propósito mayor al de identificar, definir y dibujar figuras y cuerpos geométricos; más aún, busca propiciar el **razonamiento deductivo**, de tal forma que el conocimiento de las cualidades de figuras y cuerpos permita establecer relaciones geométricas y espaciales, prescindiendo del espacio físico y haciendo uso de la abstracción.

En la Fase 3 el trabajo se orientó al desarrollo de habilidades para conocer y comprender las características de las estructuras geométricas que conforman el espacio en el que viven las y los estudiantes, a través de la imaginación y de los sentidos de la vista y el tacto, con la intención de "despertar" su intuición geométrica. En esta Fase, se pretende que, a través de diversas actividades, desarrollen habilidades, por ejemplo, abstraer propiedades comunes que les permiten hacer clasificaciones, comunicar información geométrica, visualización e imaginación espacial.

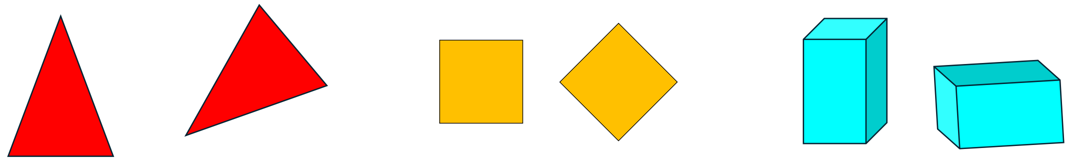
Un aspecto fundamental para el estudio de la geometría es que, en un primer momento, niñas y niños establezcan criterios para clasificar las formas con la intención de que paulatinamente reconozcan y comprendan las características únicas que las definen, además de apropiarse del lenguaje formal.

Clasificar formas implica poner en juego parámetros de **igualdad**, para identificarlas, compararlas, agruparlas, construir categorías en función de sus semejanzas y diferencias.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la geometría

- La geometría no se aprende mostrando las figuras ni mucho menos dando definiciones sin sentido para las y los estudiantes. Las actividades que se propongan deben propiciar que ellas y ellos construyan los conceptos, indaguen las propiedades, hagan conjeturas y luego traten de validarlas, a través de la observación, comparación, descripción, imaginación, inferencia, el análisis y la construcción de modelos, de manera particular de prismas, triángulos y cuadriláteros.

- Contrario al pensamiento de niñas y niños, las propiedades geométricas de las figuras y cuerpos geométricos no cambian al rotarlos o trasladarlos, es decir, las características que los definen se mantienen.



- No obstante que en esta fase se estudian los triángulos y los cuadriláteros, es importante que haya actividades en donde las y los estudiantes trabajen con otras figuras geométricas.

- Materiales como palillos, plastilina, tiras de cartoncillo, estambre, serán necesarios para construir diferentes modelos de figuras y cuerpos geométricos. También las retículas de cuadrados y triángulos son un recurso útil para el trazo de figuras geométricas y la construcción de ángulos rectos y otros mayores o menores que estos.

- En esta Fase las y los estudiantes inician el estudio de elementos y propiedades geométricas que les ayuden a definir con más detalle las formas: vértice, arista, cara, ángulo, diagonal, simetría, perpendicularidad y paralelismo.

- Para el estudio de la simetría con respecto a un eje de una figura geométrica, se recomienda llevar a cabo actividades con materiales como figuras recortadas en papel para doblarlas y verificar si son simétricas, actividades con espejos (para evitar accidentes, el reverso de los espejos se puede forrar con masking tape, así en caso de caída, los vidrios no se dispersan), así como la reproducción de figuras simétricas en retículas.

- En la segunda parte de esta fase se estudian las rectas paralelas y perpendiculares, elementos que se toman en cuenta para definir a los cuadriláteros. Niñas y niños suelen pensar que dos rectas paralelas son siempre horizontales y del mismo tamaño, para cambiar esta idea errónea, conviene analizar figuras como el trapecio, ya que sus bases son paralelas, pero de diferente longitud. De la misma manera, sus conocimientos previos sobre cuadrados y rectángulos pueden ayudar a comprender que los lados opuestos de estas figuras "no se tocan, por más que se prolonguen".

- Niñas y niños consideran que la medida de un ángulo cambia si la longitud de sus lados aumentan o disminuyen.

- Los triángulos se clasifican a partir de dos criterios: la longitud de sus lados (escaleno e isósceles, el equilátero es un caso particular de estos últimos), por la medida de sus ángulos (rectángulos, acutángulos y obtusángulos).

- El atributo que se considera para clasificar los cuadriláteros es el paralelismo de sus lados (los paralelogramos, cuyos lados opuestos son paralelos, los trapecios que tienen sólo dos lados paralelos y los trapezoides sin lados paralelos).

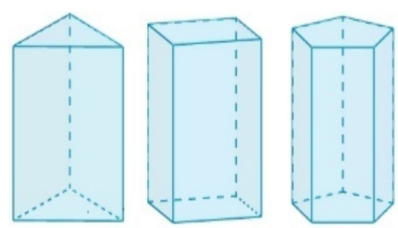
- Entre los trapecios se distinguen: trapecio isósceles (dos ángulos iguales y dos lados que tienen la misma longitud y no son paralelos), trapecio rectángulo (dos ángulos rectos) y trapecio escaleno (sus cuatro lados y ángulos tienen diferente medida). A su vez, los paralelogramos son de dos tipos: los rectángulos (cuatro ángulos rectos) y los rombos (cuatro lados iguales).

- Se pueden proponer actividades en las que niñas y niños reconozcan qué tipo de cuadrilátero se puede construir al unir dos o más triángulos o en las que analicen sus características: lados o ángulos con la misma o diferente medida, paralelismo o perpendicularidad de lados o diagonales, simetría con respecto a un eje.

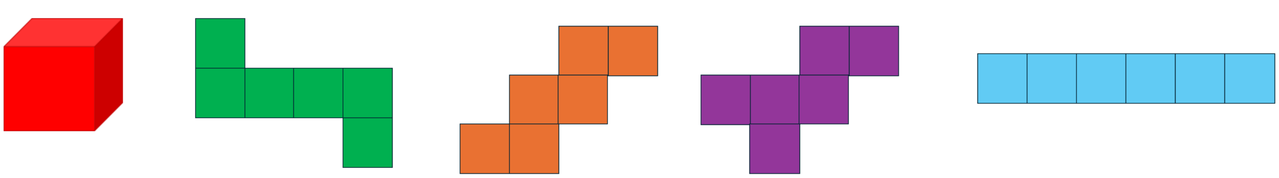
- Con relación al trabajo con prismas rectos, se busca que niñas y niños generalicen las características de cualquier prisma, es decir, que sus caras son rectangulares y que el polígono de sus bases determina el nombre del prisma. Actividades como forrar y desarmar cajas contribuye a que niñas y niños identifiquen las figuras geométricas que lo componen y su configuración, lo que permite su armado o construcción.

- Plantear situaciones en las que niñas y niños identifiquen y construyan desarrollos planos de diferentes prismas rectos para identificar los que posibilitan o no su construcción, contribuye al desarrollo de la habilidad de visualizar e imaginar cuerpos geométricos y sus características.

- La interpretación y representación de cuerpos geométricos en un plano no es tarea fácil para niñas y niños, requiere de un trabajo previo de manipulación para identificar sus caras, aristas y vértices. Una estrategia para representar las aristas y caras que no son visibles desde cierta perspectiva (vista lateral, frontal o superior), es usar líneas punteadas:



- Motivar que niñas y niños anticipen a qué cuerpo geométrico corresponde uno o varios desarrollos planos, y después, verificar si con el modelo seleccionado es posible construir dicho cuerpo. Por ejemplo:



Actividades para el aprendizaje

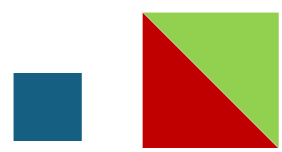
Tangram

El tangram permite desarrollar actividades que implican diferentes niveles de dificultad, y es conveniente que en cada una, las y los estudiantes expresen qué figuras geométricas utilizaron para representar sus modelos y las características que reconocen en ellas. Es importante que cada niña o niño tenga su propio material aunque se organicen parejas o tríos para trabajar, de esta forma tiene oportunidad de explorar posibilidades de acomodo, a la vez que comparte y confronta sus ideas con el resto del equipo.

Algunas actividades son:

- Construcción de figuras geométricas con dos o tres piezas: trapecios, cuadrados, rectángulos, romboides, triángulos.
- Construcción de una figura geométrica más grande que otra dada:

  Construye un cuadrado más grande que el del tangram.



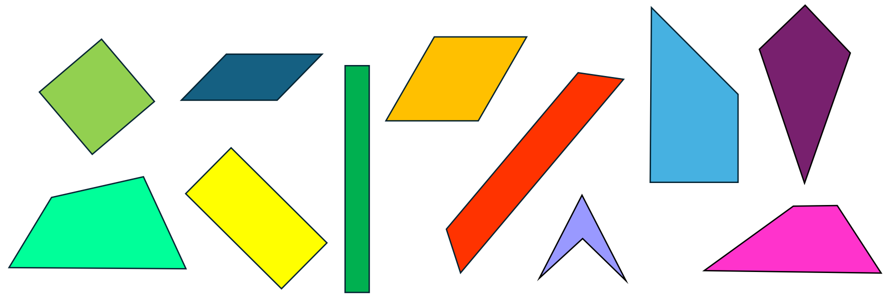
- Transformar una figura geométrica en otra:

  Mueve solo un triángulo grande del trapecio y transfórmalo en un rectángulo.

Componer triángulos a partir de cuadriláteros y descomponer cuadriláteros en triángulos

Se trata de proponer algunos cuadriláteros recortados y solicitar que en parejas las exploren para responder preguntas como:

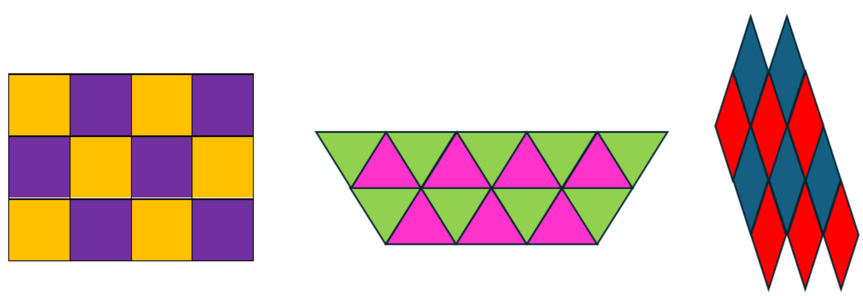
- ¿Cuáles figuras pueden dividirse en dos triángulos iguales?
- ¿Cuáles pueden dividirse en dos triángulos que tengan tres lados iguales?, ¿y que tengan dos lados iguales?, ¿y todos sus lados diferentes?
- ¿Cómo debe ser un triángulo para que, usando dos iguales, se construya un cuadrado?, ¿un rectángulo?, ¿un rombo?



Si no identifican las figuras por sus nombres, se les puede decir al mismo tiempo que se les muestra.

Pavimentar el plano usando una figura como plantilla

Además de enfocarse en la medida de los lados, niñas y niños inician el trabajo con ángulos porque para realizar el pavimentado requieren acomodar los ángulos de las figuras. Para el caso de pavimentados con triángulos se sugiere que se hagan con triángulos en los cuales los ángulos sean de diferente medida para provocar que se fijen en cuál “punta” o “esquina”, embona bien.



Reproducir ángulos

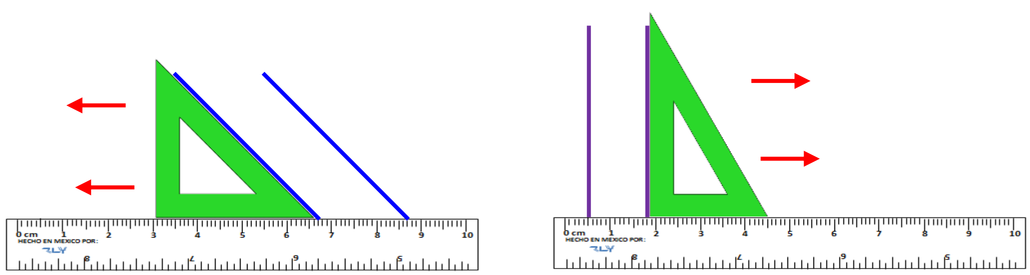
Se pide a las y los estudiantes que en una hoja blanca reproduzcan la figura dibujada en la hoja que está sobre el escritorio, pero no se la pueden llevar a sus lugares. Al final deben superponer la figura que construyan y ambas deben coincidir exactamente.

Es necesario que en el escritorio haya suficientes reglas graduadas y tiras estilo mecano construidas con dos tiras de cartón rígido y unidas por una “chinche” de dos patitas por uno de sus extremos de modo que las puedan abrir y cerrar libremente para tomar la abertura del ángulo y reproduzcan la figura.

Esta actividad propicia que las y los estudiantes pongan atención tanto en la medida de las líneas como en la abertura de los ángulos. Por el momento no se espera que los midan pero sí que noten que algunos tienen la misma abertura o que algunos están más abiertos que otros.

Construcción de figuras con instrumentos geométricos

- Con un círculo doblado en cuatro partes iguales. Se pide al grupo que, al desdoblarlo marquen con colores diferentes las líneas vertical y horizontal que observan, se motiva a que expresen la relación que existe entre los segmentos perpendiculares y los ángulos que se forman (ángulos rectos) y que tracen ángulos rectos en diferentes posiciones. Después, se organiza al grupo en parejas y se plantea la siguiente situación:
  - ¿Cómo trazarían un ángulo que mida 45° con su instrumento?, ¿qué otros ángulos podrían trazar con él?
- Con instrumentos geométricos. Utilizando la regla graduada y las escuadras se pide a las y los estudiantes que tracen líneas paralelas.



Al deslizar la escuadra sobre la regla, las dos rectas dibujadas tienen la misma inclinación con respecto a la recta definida por la regla. Así, las rectas resultantes son paralelas; por lo tanto, nunca se acercan ni se llegan a cortar.

Posteriormente, se organiza al grupo en parejas y se les proponen situaciones como las siguientes:

- Traza un triángulo isósceles y un triángulo escaleno que midan 6 cm de altura.
- Traza un cuadrado que mida 4 cm por lado y un romboide que mida 5 cm de altura.

Las figuras se comparan y se invita a algunas parejas a comentar cómo trazaron cada figura; es importante que se anime a las y los estudiantes a incorporar el lenguaje geométrico en sus explicaciones.

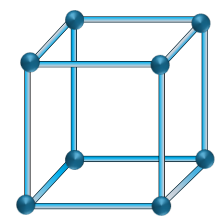
Geoplano

El geoplano (con retícula de cuadrados) facilita la construcción y visualización de las características de las figuras. Se pueden pedir a las y los estudiantes que construyan:

- Ángulos rectos y de 45º.
- Triángulos iguales o diferentes
- Cuadriláteros iguales o diferentes.
- Figuras simétricas.

Construcción de cuerpos

Con palitos, popotes y masilla o plastilina, estambre o alambre proponer la construcción de cuatro prismas rectos (triangular, hexagonal, pentagonal y rectangular).



Para armar un prisma recto

El grupo se organiza en parejas. Es necesario contar con cajas de diferentes tamaños (de cereal, medicina, papel aluminio, leche, zapatos, trastes, etcétera), tantas como parejas se formen. También se requieren pliegos de papel, tijeras, marcadores y pegamento. Sobre un pliego de papel marcan el contorno de cada una de las partes planas de la caja y las recortan. Después, sobre otro pliego acomodan y pegan las figuras recortadas, de manera que se pueda armar una caja igual. El modelo se recorta y dobla para verificar que la caja se puede construir.

Este prisma se llama…

Para la actividad se requiere contar con modelos de diferentes prismas rectos para que las y los estudiantes los exploren. El grupo se organiza en equipos de cinco o seis integrantes. Una persona del grupo elige un prisma, evitando que el resto del grupo vea cuál es. Los equipos preparan una tabla como la que se muestra para registrar las respuestas que dé su compañera o compañero y, con ellas, sepan de qué prisma se trata. El equipo que primero sepa el nombre del prisma gana un punto.

No.	¿Cuántas caras tiene?	¿Todas las caras tienen la misma forma?	¿Todas las caras son del mismo tamaño?	¿Cuántas aristas tiene?	El prisma se llama

De las actividades de aprendizaje presentadas, ¿cuáles pondría en práctica con su grupo?, ¿podría diseñar una secuencia didáctica con ellas?, ¿cuál realizará primero?, ¿cuál o cuáles realizaría después?

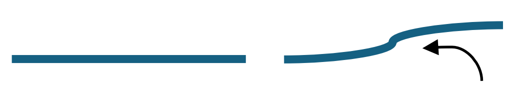
Medición

El estudio de las magnitudes favorece que niñas y niños comprendan la importancia que tiene la medición en la vida cotidiana, por ello, el trabajo se orienta a avanzar en el desarrollo de nociones y habilidades relacionadas con el uso de instrumentos y unidades para medir la longitud, masa, capacidad y el tiempo, magnitudes que se han trabajado desde grados anteriores. Además, en la segunda etapa de esta Fase, las y los estudiantes amplían sus conocimientos sobre la longitud e inician el estudio de una magnitud nueva, la superficie.

La noción de medida es un proceso continuo que requiere transitar de mediciones perceptivas a mediciones en las que se utilicen instrumentos y unidades convencionales, reflexionando sobre los resultados que se obtienen de estas.

Medir es comparar, determinar cuántas veces un patrón, al que se le denomina unidad de medida, está contenido en un objeto, un evento o un fenómeno. La medición de diferentes magnitudes desarrolla habilidades para elaborar conjeturas acerca de las propiedades físicas de objetos y temporales de eventos. Una habilidad relevante para desarrollar en la medición es la **estimación**, ya que favorece la interiorización de la unidad de medida. En este sentido, la variedad y frecuencia de experiencias que niñas y niños tengan con cierta unidad de medida facilita que progresivamente sus cálculos sean más acertados.

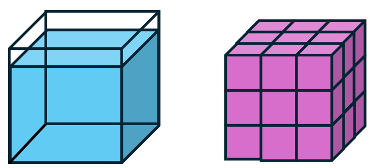
Es probable que las y los estudiantes aun tengan dificultad respecto a la conservación de la longitud de un objeto si se modifica su posición o forma. Por ejemplo, pueden pensar que la longitud varía cuando una de dos varillas o tiras del mismo largo se desplaza, o si uno de dos cordones del mismo largo se coloca formando una línea curva.



Por ello es importante continuar con actividades de estimación y comparación ya sea directamente o con un intermediario, de la misma manera que propiciar el uso de la regla graduada.

A diferencia de la longitud, la capacidad y la masa de un objeto son cualidades que no siempre se pueden determinar a simple vista, por lo que niñas y niños tienen algunas ideas erróneas sobre estas magnitudes, por ejemplo, que una misma cantidad de líquido es mayor si se vierte en un recipiente angosto que en uno ancho, y que los objetos grandes pesan más que los objetos pequeños.

Por otro lado, es común que erróneamente se considere capacidad y volumen como sinónimos. La capacidad es la cualidad que tienen los recipientes de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, aserrín, semillas, etcétera), y la unidad fundamental que se utiliza para expresarla es el litro (ℓ). El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo o un objeto, y la unidad de medida fundamental que se utiliza para expresarlo es el centímetro cúbico (cm^3).



Capacidad

Volumen

Una de las nociones más difíciles por desarrollar es el tiempo; niñas y niños tienen dificultad para definir cuánto tiempo pasa entre un evento y otro, en ocasiones, les resulta complejo describir el orden cronológico en que realizan sus actividades u ocurre un suceso, y los términos que utilizan no tienen una correspondencia temporal.

A su vez, las unidades de medida de tiempo no mantienen una regularidad decimal como las que se usan para medir longitud, masa y capacidad: un año dura 12 meses, 365 o 366 días, un mes dura 28, 30 o 31 días, de 4 a 5 semanas, un día dura 24 horas y, entre horas, minutos y segundos, existe una escala sexagesimal, es decir, los cambios de unidad (de minutos a horas) no son cada 10, como en el sistema decimal, sino cada 60, cuando se completan 60 minutos o 60 segundos.

Identificar el contorno de cualquier figura geométrica, el número de segmentos de recta que lo conforman, así como reconocer que la superficie de cualquier figura geométrica es la zona delimitada por el contorno de esa figura es fundamental para que niñas y niños puedan enfrentarse a diversas situaciones problemáticas que impliquen calcular perímetros y áreas.

El perímetro de una superficie es la suma de la longitud de sus lados y el área, es la medida de dicha superficie. El perímetro se expresa con unidades lineales y el área, por ser una magnitud bidimensional, con unidades cuadradas.

Distinguir el perímetro y el área de las figuras no es trivial para niñas y niños, lo que es necesario tomar en cuenta porque esta habilidad es fundamental para el trabajo de conceptualización y la deducción de las fórmulas en grados posteriores.

Perímetro y área de una figura son independientes; es decir, el área de una figura no depende de su perímetro, de la misma forma que su perímetro no depende del área. En ese sentido, se pueden construir figuras que tienen la misma área y diferente perímetro, y figuras con el mismo perímetro y diferente área. Por otro lado, dos figuras pueden tener el mismo perímetro o la misma área y diferente forma.

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la medición

- Niñas y niños han tenido experiencias relacionadas con la estimación, comparación y medición con unidades no convencionales y es pertinente seguir experimentando con ellas, porque su uso permite tener una idea más amplia sobre las unidades de medida convencionales y apreciar su utilidad.

- Propiciar que las y los estudiantes comprueben sus estimaciones. También, hacer énfasis que al registrar el resultado de una medición, expresen el número de veces que se repite la unidad y la unidad de medida utilizada, por ejemplo, 8 dedos, 8 cm, 8 vasos, 8 litros, etcétera. Esto favorecerá la interiorización de la unidad de medida.

- Un concepto importante de tomar en cuenta para el estudio de las magnitudes es la **conservación de la magnitud**, es decir, que las y los estudiantes cuenten con criterios para saber cuándo dos longitudes, dos superficies, dos masas o dos capacidades son equivalentes en magnitud. Estos criterios son adquiridos muy rápidamente a edades tempranas en el caso de la longitud o la capacidad, pero son lentos y tardíos en el caso de la superficie o del volumen.

- Tomar en cuenta los saberes previos de los alumnos, analizar los procedimientos que proponen y sus explicaciones, permite tomar decisiones sobre cómo enriquecer sus experiencias en torno a la medición. Por otro lado, organizar a las y los estudiantes en equipos estimula la generación de ideas aceptables o no, y aprenden el ejercicio del consenso entre ellas y ellos.

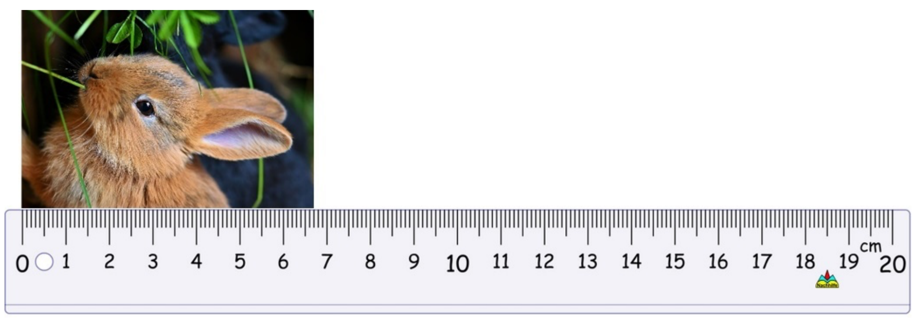
Longitud

- Para estimar, medir y comprobar resultados, niñas y niños requieren desarrollar nociones, procedimientos y habilidades como utilizar la unidad convencional acorde con el objeto a medir y repetir la misma unidad varias veces sin dejar espacios entre una y otra.

- Para medir longitudes, con varillas, tiras de papel o cordones niñas y niños pueden construir el metro, $\frac{1}{2}$ metro y $\frac{1}{4}$ metro, e incorporar el uso del metro y la regla graduado en centímetros, una vez que se haya avanzado en las nociones de décima parte (décimo-decímetro) y centésima parte (centésimo-centímetro), con el propósito de realizar mediciones más exactas.

- Algunos errores comunes de niñas y niños al utilizar la regla graduada son: dejar huecos entre una marca y otra al hacer la regla, o no hacer coincidir el inicio de la tira y de la regla al usarla, el poder discutirlos en clase favorece la comprensión ya que se escuchan varios puntos de vista que aportan al buen uso de las herramientas para medir.

- Orientar a niñas y niños acerca de que al utilizar la regla graduada, la medición inicia desde la marca donde está el cero, hacer énfasis en que las marcas grandes indican los centímetros y las marcas pequeñas son los milímetros, que en cada centímetro hay 10 milímetros, sin que esto lleve a realizar conversiones de unidades.



Masa y Capacidad

- Con el uso de instrumentos como la balanza de platillos y pequeños sacos o costales rellenos de arena, tierra o aserrín que pesen un kilogramo, $\frac{1}{2}$ kilogramo y $\frac{1}{4}$ kilogramo, las y los estudiantes pueden estimar, medir y establecer comparaciones entre objetos y confrontar ideas como que la cantidad de masa depende del tamaño del objeto. De la misma forma, conviene identificar recipientes de uso cotidiano que equivalgan al litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ litro para medir y comparar la capacidad de diferentes objetos.

Tiempo

- La capacidad de niñas y niños para comprender el tiempo depende del desarrollo de diversas habilidades cognitivas como la memoria y el lenguaje y de otras, como las relacionadas con la aritmética y la ubicación espacial. Estas permiten entender que el tiempo pasa y que es posible medirlo.

- Niñas y niños necesitan representaciones conceptuales para dar significado al tiempo, necesitan desarrollar un sentido de la duración de una hora y un minuto, por lo que es importante propiciar experiencias grupales y personales relacionadas con estas duraciones.

- Leer el reloj implica comprender una nueva relación numérica, pasar de un sistema decimal a una sexagesimal, en la que 15, 30 y 45 son referentes importantes para establecer proximidad con una hora. También escribir la hora requiere conocer y usar una notación diferente: 06:45 h o 6:45 a.m., 18:45 h o 6:45 p.m.

- Los relojes analógicos permiten observar cuántos minutos han transcurrido después de la hora o cuántos faltan para completarse otra, ello favorece a establecer relaciones entre las unidades de tiempo, leer y comprender que, por ejemplo, si son las 11 con 59 minutos, las 12 horas están próximas, porque 59 es cercano a 60 y un minuto es poco tiempo. Otra escala por considerar es la que rige a las horas, ya que una vez que se completaron las 12 horas señaladas en la carátula el ciclo vuelve a iniciarse.

  Por su parte, en los relojes digitales se aprecia la secuencia de las 24 horas del día, aunque pueden dificultar la comprensión de las relaciones entre las unidades si no se tiene presente, por ejemplo, que después de las 11:59 h no siguen las 11:60 h, sino las 12:00 h.

- Algunas dificultades que suelen tener niñas y niños al leer el reloj son: confundir la dirección en que avanzan las manecillas, leer la hora con la manecilla minutero, contar incorrectamente los minutos.

- La lectura del reloj tiene relación con capacidades matemáticas (contar, sumar, restar, multiplicar números naturales y fracciones. También implica la comprensión y el uso de cierto vocabulario: *“tres y media”*, *“las seis y veinte”, “cuarto para las cinco”,* y notación: 06:45 h, 17:28 h, 11:30 a.m., 08:50 p.m.

- En vinculación con Procesos de Desarrollo de Aprendizaje del contenido “Estudio de los números”, es conveniente que niñas y niños construyan la noción de cuarto de hora, media hora, tres cuartos de hora, a partir de establecer su correspondencia con la cantidad de minutos.

Contorno y Superficie

- Las y los estudiantes tienen conocimientos relacionados con la medición de longitudes y la composición, descomposición y descripción de figuras geométricas. Ahora inician el trabajo con otra magnitud, la superficie. Se trata de que empiecen a tener experiencias que poco a poco les ayuden a desarrollar la noción del espacio delimitado por el contorno de una figura, de sus propiedades, así como habilidades para medirlo.

- La **conservación de la superficie** supone, por ejemplo, la idea de que dos figuras tienen la misma superficie si una se puede transformar en la otra o cuando ambas se descomponen en las mismas piezas, es decir, ocupan el mismo espacio en el plano. Esto servirá de base para regular en grados posteriores la medición con unidades y la producción y uso de fórmulas.

- Niñas y niños suelen pensar que si dos figuras tienen distinta forma, también tienen distinta superficie. Por ello, es conveniente que primero estimen, comparen y ordenen superficies de manera directa y después con unidades no convencionales. La posibilidad de comparar y ordenar figuras antes de medirlas implica transformar una figura en otra con distinta forma pero conservando la superficie, lo que ayuda a poner en primer plano la magnitud separándola de la forma. Además, creen que existe una relación de estrecha dependencia entre el perímetro y el área. Por ejemplo, si el perímetro de una figura es mayor, menor o igual que el perímetro de otra, entonces su área también es mayor, menor o igual.

¿Ha identificado usted en sus estudiantes algunas ideas erróneas de las aquí mencionadas? ¿Cuáles?

Actividades para el aprendizaje

a) Longitud

Pensamos que mide…

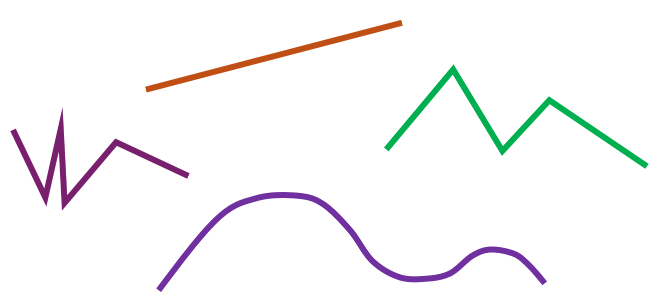
El grupo se organiza en equipos de dos a tres integrantes. Cada equipo debe identificar y clasificar objetos del entorno conforme a ciertas características, por ejemplo, objetos que miden o tienen un lado que mide menos de un cuarto de metro, objetos que miden o tienen un lado que mide más de medio metro, pero menos que un metro. Posteriormente los equipos presentan al resto del grupo sus propuestas y comprueban sus estimaciones.

¿Cuántas veces cabe?

El grupo se organiza en equipos. Cada equipo debe contar con tiras de papel o cartoncillo que midan 25 cm, 50 cm y un metro, para estimar cuántas veces cabe cada tira en algún lado de los objetos seleccionados, por ejemplo, su mesa de trabajo, una ventana, la puerta, el pizarrón o el salón de clases. Las estimaciones de los equipos se registran en una tabla y después se comprueban. En plenaria se comenta qué tan acertadas fueron las estimaciones y qué dificultades tuvieron para realizar la actividad.

Al tanteo[16]

En el piso del patio se trazan líneas como las que se muestran, y se solicita a las y los estudiantes que en una tarjeta registren cuánto creen que mide cada línea, y la entreguen para después revisarlas. El grupo se organiza en equipos para verificar las medidas de las líneas con el metro o la regla graduada. Al terminar la medición, en plenaria se leen las tarjetas y se comenta qué tan cerca o qué tan lejos estuvieron sus estimaciones de las medidas reales.



[16] Tomada de Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado. (Ficha 38). México.

b) Masa y Capacidad

Con la báscula

Situaciones en las que niñas y niños utilicen la báscula y las unidades de medida construidas (revisar “Actividades para el aprendizaje” del apartado Números), por ejemplo:

- Ordenar objetos de mayor a menor masa después de sopesarlos y comprobar su estimación en la balanza.
- Sopesar objetos para identificar cuáles podrían pesar un kilogramo, $\frac{1}{2}$ kilogramo y $\frac{1}{4}$ kilogramo y después comprobar sus estimaciones con la balanza.
- Experimentar para comprobar o descartar la idea de que los objetos grandes pesan más que los pequeños.

Con un litro

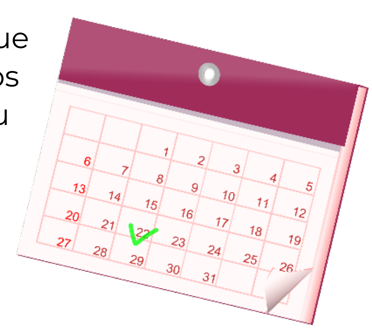
Situaciones en las que niñas y niños utilicen el litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ litro (revisar “Actividades para el aprendizaje” del apartado Números), por ejemplo:

- Ordenar objetos de mayor a menor capacidad.
- Proponer objetos que podrían contener un litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ litro y después comprobar sus estimaciones.
- Experimentar para comprobar o descartar la idea de que la cantidad de líquido varía si de un recipiente ancho se cambia a uno angosto o viceversa.

c) Tiempo

¿Cuánto tiempo ha pasado?

Describir oralmente actividades realizadas recientemente, las que se realizarán y las recurrentes, registrarlas en calendarios semanales, mensuales y anuales, comparar y ordenar su duración, también, señalar cuánto tiempo ha pasado desde que ocurrieron o cuánto tiempo falta para que ocurran.

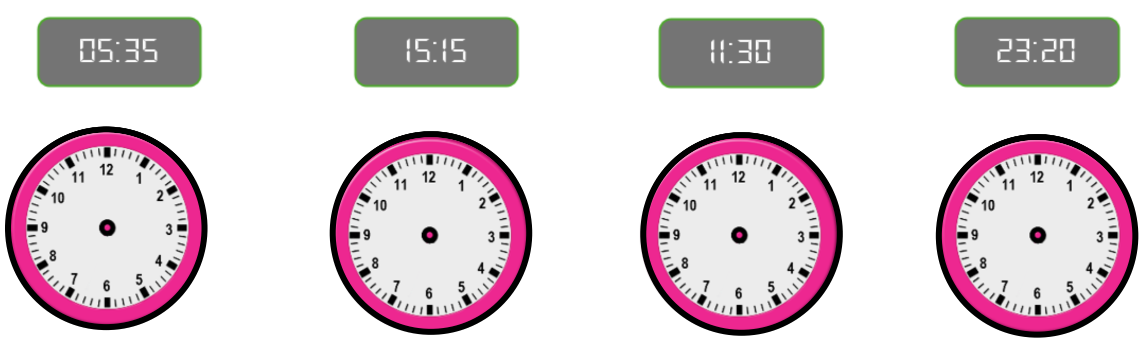


Con el reloj

Con el uso de relojes analógicos:

- Establecer el tiempo que tardan en realizar diferentes actividades y ordenarlas de menor a mayor duración o viceversa.
- Determinar la hora de inicio de cierta actividad dada la hora de finalización de una actividad y su duración o después de transcurrido algún tiempo.
- Anticipar la duración de una actividad y luego verificarla.
- Proponer actividades o eventos que duran menos de 15 minutos, menos de media hora, menos de dos horas y comprobar sus estimaciones.
- Registrar en modelos concretos o gráficos diferentes horas y escribir la hora señalada en diferentes relojes. Por ejemplo:
  - Dónovan salió de su casa a las 07:20 a.m. para ir a la escuela, y tardó 15 minutos en llegar. Registra en el reloj la hora en que Dónovan llegó a la escuela.
  - ¿Qué hora marca este reloj?

- Registrar la hora marcada en relojes digitales:
  - Marca en cada reloj de manecillas la hora señalada en el reloj digital.



d) Contorno y Superficie

Perímetro

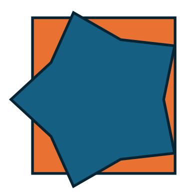
Determinar la medida del contorno de cualquier superficie o figura (perímetro) a través de estrategias como:

- Sumar las longitudes de los segmentos de recta que conforman el contorno.
- Trasladar todos los lados uno tras otro sobre una regla graduada.
- Colocar una cuerda o hilo sobre el contorno de la figura o superficie, marcarlo cuando se haya rodeado la figura y después, estirarlo y medir su longitud con una regla graduada. Este procedimiento es útil en particular cuando las figuras tienen lados curvos.

Comparación de superficies

Es conveniente organizar al grupo en parejas para realizar actividades que implican comparar de manera directa la superficie de polígonos diferentes, a partir de estrategias como:

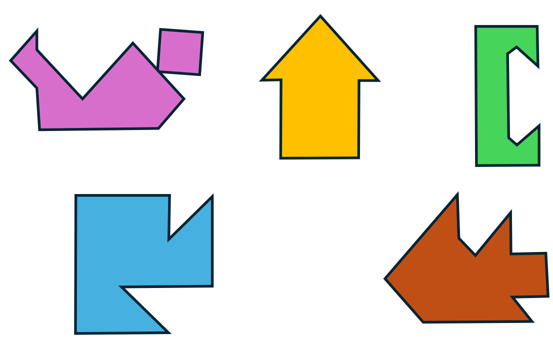
- Superposición. Consiste en tomar dos figuras, colocar una sobre la otra y determinar cuál es la de mayor o menor superficie.



- Descomposición en las mismas piezas. El tangram es un recurso útil para realizarla. Por ejemplo:

  "Cada una de las siguientes figuras fue hecha con seis piezas del tangram. Tres figuras tienen la misma superficie, otra tiene superficie más pequeña y otra superficie más grande. Encuentra cuáles son".

  La situación no se resuelve "a ojo", lo que motiva que niñas y niños armen cada figura hasta identificar cuál pieza no se usó.



- Recubrimiento. Cuando al superponer dos figuras no se puede saber cuál es mayor, se recorta una de las figuras en pedazos tratando de cubrir con ellos la otra figura. Si no se logra cubrir, entonces la superficie es menor, y de manera similar se puede averiguar si es equivalente o mayor. La intención no es usar unidades de medida, por lo que los pedazos en los que se recorta una de las figuras pueden ser irregulares.

Esta estrategia y la anterior posibilitan que las y los estudiantes observen y vayan comprendiendo que la forma cambia pero la superficie se conserva, además, es importante que se incluyan polígonos regulares e irregulares, ya que, cuando solo se trabaja con figuras geométricas conocidas (cuadrado, rombo, etc.) las y los estudiantes construyen una idea errónea de que solo éstas tienen una medida de superficie.

Geoplano[17]

Se organiza al grupo en parejas para reproducir algunas figuras, después, se pide que observen todas las realizadas y comenten en qué son iguales y en qué son diferentes, si tienen o no el mismo número de lados, si tienen el mismo perímetro (tomando como unidad de medida el lado de un cuadrado) o si el área es la misma (utilizando como unidad de medida un cuadrado). Los resultados se registran en una tabla como la siguiente:

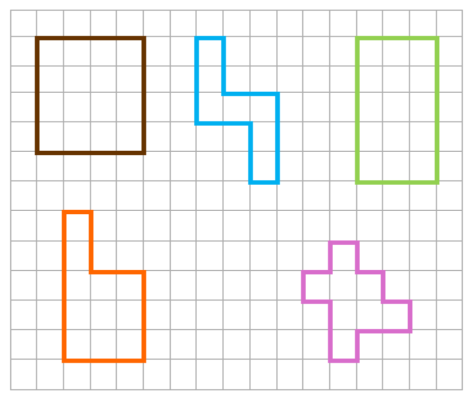
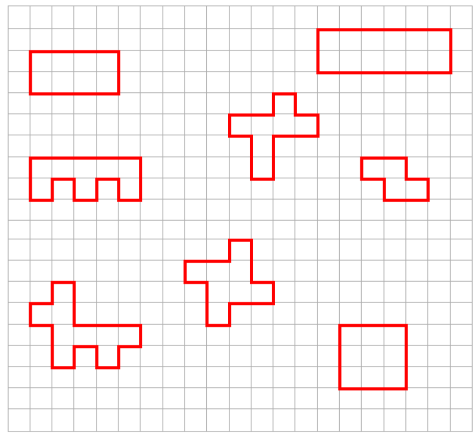


Figura	Café	Azul	Verde	Anaranjado	Rosa
Perímetro (lado de un cuadrado)					
Área (cuadrados)					

[17] Adaptadas de: Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Cuarto grado. México. (Fichas 10 y 16). México.

También organizado en parejas, se pide al grupo que reproduzca algunas figuras y después respondan: ¿Cuáles figuras tienen igual área?, ¿cuáles tienen igual perímetro?, ¿las figuras con igual área tienen el mismo perímetro?; si una figura tiene menor área que otra, ¿también tiene menor perímetro?; si una figura tiene mayor perímetro que otra, ¿también tiene mayor área? En plenaria se revisan y comentan las respuestas.

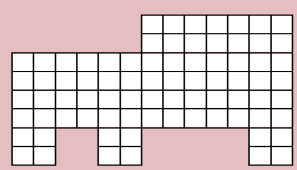


Construcción de figuras

Cada estudiante necesita una retícula de cuadrados para construir figuras con ciertas características:

- Dos figuras con igual área y diferente perímetro.
- Dos figuras con igual perímetro y diferente área.
- Dos figuras diferentes con igual perímetro y área.

Separe la figura en dos partes exactamente iguales en forma y tamaño.



¿Qué conocimientos, habilidades o destrezas puso en juego para resolver este problema?

¿Podría plantear otro problema similar a partir de este ejercicio?

¿Cuál y con qué intención didáctica?

[18] Tomado de "Rompiendo cabezas". Secretaría de Educación Pública. (1994). Matemáticas Quinto grado. Libro para el alumno. (p.131). México.

Organización e interpretación de datos

En la Fase anterior, las y los estudiantes recolectaron, registraron, organizaron datos en tablas o pictogramas para responder preguntas de su interés. En esta Fase los conocimientos y las habilidades relacionadas con la recolección, organización y análisis de datos se enriquecen al propiciar que niñas y niños elaboren conjeturas, resuelvan problemas, tomen decisiones, produzcan y comuniquen **información cuantitativa y cualitativa**, al interpretar **tablas** de datos, **pictogramas**, **gráficas de barras** y la **moda** en un conjunto de datos.

Tener conocimientos y habilidades estadísticas es fundamental para cualquier campo de conocimiento. La estadística, es una materia interdisciplinar útil no sólo en la clase de matemáticas, sino en otras áreas de conocimiento donde se convierte en una herramienta para la resolución de problemas, porque permite entender datos sobre un tema y, con ello, tomar mejores decisiones.

La estadística se divide en dos grandes ramas: la estadística descriptiva y la estadística inferencial. La estadística descriptiva proporciona herramientas y técnicas para recopilar, ordenar, representar, analizar, obtener y sintetizar un conjunto de datos numéricos con el objetivo de comprenderlos, transmitir de forma clara y eficaz sus características fundamentales, generar información y tomar decisiones. En este tipo de estadística se distinguen tres categorías: la distribución de frecuencias, las medidas de tendencia central y las medidas de variabilidad, y solo las dos primeras se estudian en Educación Primaria.

Las y los estudiantes han trabajado la distribución de frecuencias desde primer grado, ahora se trata de ampliar su conocimiento sobre los datos numéricos a partir de las medidas estadísticas denominadas **medidas de tendencia central** que son: moda, media aritmética o promedio y mediana. La media aritmética se estudiará en la siguiente Fase; mientras la mediana es motivo de estudio de la Educación Secundaria (Fase 6).

Aspectos que son importantes de tomar en cuenta para favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la organización e interpretación de datos

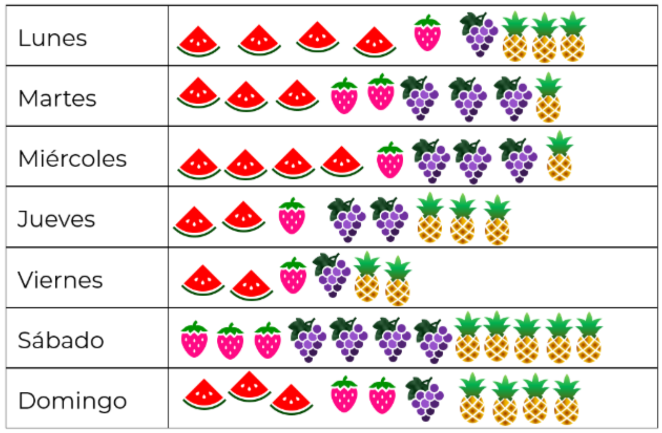
- Para niñas y niños, la recolección de datos debe ser una actividad motivada por la necesidad de responder una pregunta concreta, interesante y relevante que permite aprender sobre diversos temas de su interés: animales, juegos, fenómenos meteorológicos, alimentos, entre otros.

- En la medida que niñas y niños practican la recolección de datos, alcanzan seguridad para tomar decisiones sobre cómo realizar el proceso y qué tipo de preguntas conviene hacer para obtener la información deseada.
- La participación de las y los estudiantes en proyectos en los que deban recolectar sus propios datos a partir de la observación, realización de encuestas y mediciones, análisis de datos, elaboración de conclusiones y confrontar sus ideas iniciales con los resultados, favorece el desarrollo del razonamiento estadístico.
- Las preguntas o problemas que originen el proceso estadístico deben ser del interés de las y los estudiantes, además de tener un propósito claro, por lo que conviene enunciar por qué es importante o necesario abordarlo. La recomendación es que las preguntas o problemas no sean tan fáciles que no implique realizar alguna indagación, ni tan difíciles que sea imposible que las y los estudiantes los resuelvan.
- Es conveniente que las y los estudiantes trabajen con datos de distintas fuentes como revistas, periódicos, sitios en internet de instituciones confiables, entre otras. La información puede organizarse en tablas, gráficas de barras y motivar que se analicen las tendencias de los datos, por ejemplo, el valor más frecuente.
- Propiciar la construcción e interpretación de pictogramas (gráficas en las que los datos se representan con dibujos) y tablas con los datos recolectados; motivar que niñas y niños propongan cómo representar los datos que irán recolectando (marca, palabra, dibujo), y posteriormente verifiquen si con el pictograma o la tabla construida obtienen la respuesta que buscaban, también, que sugieran otras preguntas que se puedan responder a partir de él.
- Una forma de avanzar en la construcción e interpretación de pictogramas es utilizar dibujos semejantes con diferente valor para representar las frecuencias (■ representa 2 veces y ▪ representa 1 vez), o dibujos en los que uno es fracción de otro (● representa 2 veces y ◖ representa 1 vez); el valor de cada dibujo se puede modificar dependiendo de la cantidad de datos que se organicen.
- Introducir el término **frecuencia** para referirse al número de veces que un dato se registra en una tabla o gráfica. Por ejemplo:

Animales cuyo cuerpo está cubierto con...	Registro	Frecuencia
Plumas	///////	7
Escamas	/////	5
Pelo	///////////	11

- La moda es el dato o los datos que, en un conjunto de datos numéricos o cualitativos, aparecen con mayor frecuencia, aunque puede darse el caso de que en un conjunto no haya moda porque los datos tienen la misma frecuencia. La moda no se calcula, se identifica. Por ejemplo:

Este es el registro de ventas de una frutería (cada imagen representa dos kilogramos de fruta). ¿Cuál fue la moda de esa semana?



En este caso, la frecuencia de la sandía es 36, de la fresa es 22, de la uva, 30 y de la piña es 38, por lo tanto, la moda de la semana corresponde a la fruta piña.

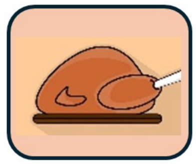
- Sobre el trabajo con gráficas de barras, presentar gráficas que se encuentren en diferentes medios (revistas, libros, folletos, periódicos) sobre temas de interés de niñas y niños o relacionados con contenidos de este u otro Campo formativo. Plantear preguntas que se respondan directamente con los datos presentados o que requieran hacer cálculos con ellos. También, propiciar que sugieran otras preguntas que pueden o no responderse con la gráfica.
- Motivar la reflexión sobre los elementos de una gráfica de barras: Titulo o nombre de la gráfica, Eje horizontal (categorías o tipos de datos), Eje vertical (escala que indican la frecuencia de los datos), Barras o columnas (su altura representa la frecuencia de un dato; el ancho de las barras y el espacio que existe entre ellas siempre es igual).
- El análisis de datos es un aspecto que debe propiciarse a lo largo de la Fase. Actividades como, plantear preguntas a partir de ilustraciones y documentos, identificar preguntas que pueden o no responderse con la información de una imagen o un texto, reflexionar sobre los datos que son útiles para resolver un problema, los que no lo son y los que faltan, ayudan a que niñas y niños desarrollen su capacidad de análisis y resolución de problemas.

Actividades para el aprendizaje

Mi comida favorita

El grupo se organiza en equipos de cinco integrantes. En el pizarrón se coloca la ilustración de cinco platillos diferentes, por ejemplo:





Cada integrante del equipo debe comentar cuáles son sus tres platillos favoritos y el resto lo registra. El equipo debe ponerse de acuerdo para dar a conocer sus resultados en una tabla. Después de revisar grupalmente las tablas de los equipos, se puede organizar al grupo para elaborar una tabla general que contenga todos los resultados.

La moda del estado del tiempo

El grupo se organiza en equipos de tres integrantes para solucionar el siguiente problema:

> La tabla muestra el número de días de cada mes en que se registró cada uno de los tres estados del tiempo:

Mes	Soleado	Nublado	Lluvioso
Enero	5	20	6
Febrero	0	20	8
Marzo	15	3	13
Abril	10	10	10
Mayo	22	1	8
Junio	5	5	20
Julio	6	4	19
Agosto	10	5	16
Septiembre	5	5	15
Octubre	10	13	8
Noviembre	5	18	7
Diciembre	12	14	5

Revisen las preguntas y pónganse de acuerdo para responderlas.

a) ¿Cuál es el mes con más días lluviosos?

b) ¿Cuántos días en el año fueron soleados?

c) ¿Cuál es el mes con menos días nublados?

d) ¿Cuál es la moda de los días soleados?, ¿y de los días lluviosos?

e) ¿Creen que servirá de algo saber la moda del estado del tiempo?

Las respuestas de los equipos se comentan grupalmente. Se espera que las y los estudiantes coincidan en que en este caso la moda es un dato que puede ayudar a tomar decisiones, por ejemplo, en qué mes es necesario salir de casa con un paraguas, o en qué meses conviene usar ropa ligera.

Cuántas niñas y cuántos niños hay[19]

El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes y se comenta que en el sitio de internet "INEGI" se encuentra información referente a cuántas niñas y cuántos niños de 0 a 14 años hay en el país, de acuerdo con el Censo 2020[20]. Los datos que se escriben en el pizarrón corresponden a las seis entidades con menor población:

Censo 2020

- Tlaxcala: 161 650 niñas y 168 328 niños.
- Colima: 88 130 niños y 85 033 niñas.
- Baja California Sur: 99 896 niños y 97 157 niñas.
- Campeche: 118 630 niñas y 207 521 niños.
- Aguascalientes: había 195 417 niños y 189 778 niñas.
- Nayarit: 161 650 niñas y 168 328 niños.

[19] Adaptado de "*¿Son más hombres que mujeres?*" en Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado. México.
[20] INEGI. Población total por entidad federativa y grupo quinquenal de edad según sexo, serie de años censales de 1990 a 2020. Julio 22 de 2024.

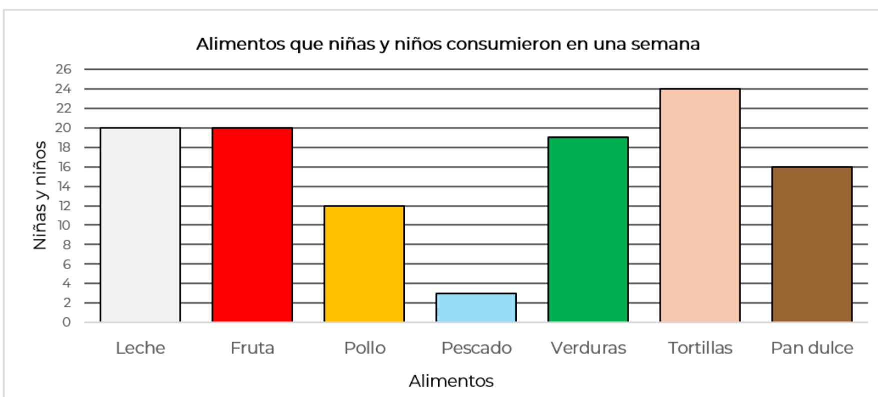
Se pide a los equipos que organicen la información en una tabla. Cuando la terminan, un representante de cada equipo la presenta y explica cómo la construyeron. Las tablas se revisan grupalmente y se determina cuáles están mejor organizadas.

En otra sesión se puede solicitar que los equipos respondan algunas preguntas consultando su tabla; las respuestas se revisan grupalmente:

- ¿En cuál estado había más niñas en 2020?
- ¿En cuál estado había menos niños en 2020?
- ¿Cuál era el estado con mayor población infantil?
- ¿Cuál era la población total de niños en estos estados?
- Ordenen de mayor a menor la población infantil de los seis estados.
- Inventen dos preguntas que se puedan contestar con los datos de la tabla.

¿Qué dicen las barras?[21]

Se organiza al grupo en equipos. A cada uno se entrega una gráfica de barras como la que se muestra en el pizarrón:



Y se pide que, de una lista de preguntas, señalen las que se pueden responder con los datos de la gráfica. Por ejemplo:

- ¿Cuántas niñas y cuántos niños hay en el grupo?
- ¿Cuál es el alimento que más se consumió en esa semana?
- ¿Quién hizo la encuesta?

[21] Adaptado de *"La temperatura"* en Secretaría de Educación Pública. (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado. (pp. 88-91). México.

- ¿Cuál es el alimento que menos se consumió en esa semana?
- ¿Cuántas personas consumieron pollo?

Después, los equipos responden las preguntas que identificaron y las respuestas se revisan grupalmente.

¿Qué comen los animales?

Es conveniente desarrollar esta actividad en varias sesiones. Con anticipación se pide a cada niña y niño que busque información acerca de lo que comen sus cuatro animales favoritos y se preparan materiales como: pliegos de papel, hojas blancas, marcadores de colores, regla graduada, lápices, tijeras, pegamento, cita adhesiva.

El grupo se organiza en equipos de cuatro integrantes para compartir su investigación y clasificar sus animales favoritos de acuerdo con las siguientes categorías: a) animales herbívoros, b) animales carnívoros, c) animales omnívoros. Después, se pide a los equipos que elaboren una tabla y un pictograma para compartir la frecuencia de sus categorías; si se considera posible, se puede motivar a los equipos a que intenten utilizar dibujos semejantes con diferente valor para representar las frecuencias, por ejemplo: ● para representar dos veces y ● para representar una vez.

Los pictogramas se revisan grupalmente para valorar si representan los resultados de sus investigaciones. Finalmente, todo el grupo determina la moda de la clasificación de los animales de acuerdo con lo que comen.

Si la estadística es una herramienta necesaria en cualquier campo de conocimiento para la toma de decisiones, ¿qué aspectos de su práctica docente modificaría o qué actividades implementaría con sus estudiantes para desarrollar habilidades relacionadas con esta área de las matemáticas?

Fuentes de consulta

Ávila, A. y García, S. (2008). Los decimales: más que una escritura. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D402.pdf

Burny, E., Valcke, M. & Desoete, A. (2009). Towards an agenda for studying learning and instruction focusing on time-related competences in children. Educational Studies. https://www.researchgate.net/publication/235981284_Towards_an_agenda_for_studying_learning_and_instruction_focusing_on_time-related_competences_in_children

Chamorro, M. (2006). Didáctica De las Matemáticas para Primaria. PEARSON. Prentice Hall. México. México. https://archive.org/details/chamorro-m.-a.-didactica-de-las-matematicas/page/n3/mode/2up

Construyo una balanza. Nueva Escuela Mexicana Digital https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-ficha/5746/

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). El perímetro y el área en *Matemáticas 5° de primaria. Orientaciones didácticas*. (pp. 30-43). Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_05_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). La longitud en *Matemáticas 3° de primaria. Orientaciones didácticas*. (pp. 20-23). Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_03_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). La medida en *Matemáticas 2° de primaria. Orientaciones didácticas*. (pp. 22-28). Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_02_mate.pdf

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). Matemáticas 4° de primaria. Orientaciones didácticas. Ciudad de México. https://www.mejoredu.gob.mx/images/publicaciones/orientaciones/od_04_mate.pdf

Fazio, L., Siegler, R. (2010). Enseñanza de las fracciones. Capítulo 2: Las fracciones son números (pp. 10-11). https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000212781_spa

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, enero-abril, número 043. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Madrid, España. pp. 119-130. https://rieoei.org/historico/documentos/RIE43A06.pdf

Ferrer, Maribel. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. Tesis presentada en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santiago de Cuba. https://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/indice.htm

Fortuny, J. (1994). La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación, en Farrell, M. (et al.). (2003). La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula. Graó. Barcelona.

Fuenlabrada, et al. (1994) Lo que cuentan las cuentas de sumar y restar. *Libros del Rincón*. SEP. México

García, S. (2014). Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INEE. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D416.pdf

García, S. y López, O. (2008). La enseñanza de la Geometría. Colección Materiales para apoyar la práctica educativa. INEE. México. Recuperada de https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

Godino, J. (Coord.), (2004). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

González, J. (2022). La medida y su didáctica. Propuesta para futuros docentes de educación primaria. Universidad de Valladolid, España. Facultad de Educación de Segovia.
https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/53985/TFG-B.%201806.pdf?sequence=1

INEGI. Población total por entidad federativa y grupo quinquenal de edad según sexo, serie de años censales de 1990 a 2020. Julio 22 de 2024.
https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/interactivos/?pxq=Poblacion_Poblacion_01_e60cd8cf-927f-4b94-823e-972457a12d4b

Itzcovich, H: Broitman, C. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB. Provincia de Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación.
https://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2012/06/division.pdf

Jones, K. & Edwards, J-A. (2017). Planning for mathematics learning. In S. Johnstone-Wilder, C. Lee, & D. Pimm (Eds.) (2017), Learning to teach mathematics in the secondary school: A companion to school experience (chapter 5). Abingdon: Routledge. 4th edition (pp. 70-91). Johnston-Wilder S., Lee C., Primm D. (2016).

https://www.academia.edu/110953469/Learning_to_teach_mathematics_in_the_secondary_school_a_companion_to_school_experience?uc-sb-sw=9477367

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., y Zanocco, P. (2014). REFIP Matemática: Números para futuros profesores de Educación Básica. Santiago: Ediciones SM.
https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/15621

Llinares, S., Sánchez, M. (1998). Fracciones. Capítulo 4 (pp. 114-115). España: Editorial Síntesis.
https://www.academia.edu/41365849/Fracciones_La_relaci%C3%B3n_parte_todo

Martínez, M. (et al.). (2016). El papel de los problemas de enunciado verbal en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria desde la perspectiva de los profesores. Revista Electrónica de Investigación e Innovación Educativa (Vol. 1 no. 2 jul-sept). https://core.ac.uk/download/pdf/85144055.pdf#page=6

Mutlu, Y. & Korkmaz, E. (2020). Investigating clock reading skills of third graders with and without dyscalculia risk. 9. 97-110.
https://www.researchgate.net/publication/342491802_INVESTIGATING_CLOCK_READING_SKILLS_OF_THIRD_GRADERS_WITH_AND_WITHOUT_DYSCALCULIA_RISK

OCDE, OIE-UNESCO, UNICEF LACRO (2016). La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica. Serie Aprendizajes y Oportunidades. https://panorama.oei.org.ar/_dev/wp-content/uploads/2017/09/UNICEF_UNESCO_OECD_Naturaleza_Aprendizaje_.pdf

Parra, C. y Saiz, I. (comps). (1994). Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Editorial Paidós SAICF. Argentina.

Parra, C. y Saiz I. (2008). Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio. SEP / Homo Sapiens Ediciones. México.

Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P. (1994). Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. Matemáticas y su enseñanza. Documento curricular P.T.F.D., en Matemática, Documento de trabajo No. 5 La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación. Argentina. http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.2, pp.809-824. http://funes.uniandes.edu.co/26411/1/Rodr%C3%ADguez2016Habilidades.pdf

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5. Pp. 13-66. https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado. https://historico.conaliteg.gob.mx/H2014P4DMM.htm#page/1

Secretaría de Educación Pública. (2014). Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado. https://historico.conaliteg.gob.mx/H2014P3DMM.htm#page/1

Secretaría de Educación Pública. (2024). Desarrollo de habilidades. Matemáticas Fase 3. Cuadernos de apoyo curricular para la práctica docente. México. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Desarrollo-de-habilidades-matematicas_Primaria_Fase-3.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Cuarto grado. México.

https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-4to.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Segundo grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-2do.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2004). Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Tercer grado. México. https://sector2federal.files.wordpress.com/2016/11/fichero-mat-3ero.pdf

Ursini, S. y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. Revista Colombiana de Educación, (73), 213-234. http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n73/0120-3916-rcde-73-00213.pdf